F
7414

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIȘOARA

243

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tomul 25 (39) Fascicola 1

IANUARIE–IUNIE
1980

Cititorii din străinătate se pot abona prin

I L E X I M,

Serv. Export-import presă – Press Department

str. 30 Decembrie nr. 3–5 – P.O.B. 136–137

Bucharest – Romania

F 7414

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC AL INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA" TIMIȘOARA

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) Fascicola 1

IANUARIE—IUNIE
1980

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
7414
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

COLEGIUL DE REDACȚIE

Acad. prof. dr. doc. ing. IOAN ANTON, Prof. dr. ing. GHEORGHE CREȚU, Prof. em. dr. doc. ing. GHEORGHE SILAȘ — redactor șef, Prof. em. ing. CONSTANTIN AVRAM, m.c. al Acad. R.S.R., Prof. dr. ing. DUMITRU BECHERESCU, Prof. dr. ing. VASILE COCHECI, Prof. dr. BORISLAV CRSTICI, Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA, Prof. dr. ing. TOMA DORDEA, Prof. dr. ing. TRAIAN NICOARĂ, Prof. dr. ing. FRANCISC KOVACS, Acad. prof. dr. ing. DAN MATEESCU, Prof. dr. ing. TIBERIU MUREȘAN, Prof. dr. ing. IOAN NIȚĂ, Prof. em. dr. ing. GHEORGHE SAVII, Prof. dr. doc. ing. CONSTANTIN ȘORA, Prof. dr. ing. LIVIU BRÎNDEU — secretar de colegiu

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
P 3311/1981

COMITETUL DE REDACȚIE

I. *Matematică-fizică*

Prof. dr. BORISLAV CRSTICI — redactor responsabil, Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA, Prof. dr. ing. MARIUS BORNEAS — red. resp. adj., Prof. dr. OCTAV E. GHEORGHIU, Conf. dr. EUGEN BURLACU — secretar de redacție.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

BULETIN ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC AL INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA

Seria Matematică-Fizică

Tom 25 (39) **Fascicola 1** **ianuarie—iunie 1980**

1. *J. E. Pečarić* — Asupra inegalităţii lui Cebîşev 5

2. *J. E. Pečarić* — Asupra generalizării lui Fuchs pentru teorema majorării 10

3. *Gh. Babescu* — Asupra familiilor de cosinus de operatori liniari tare continui şi asupra generatorilor lor infinitezimali 12

4. *Gh. Boceşan, E. Roventa* — Asupra teoremelor de punct fix în spaţii metrice probabilistice 18

5. *Carmencita Urosu* — Asupra laticei congruenţelor unei sume directe de algebre universale 21

6. *O. Lipovan* — Echivalenţa şi singularitatea măsurilor de probabilitate gaussiene în subspaţii ale spaţiului măsurilor reale şi mărginite 26

7. *O. Lipovan* — Citeva observaţii asupra măsurilor de probabilitate definite pe structuri generate de măsura Lebesque-Stieltyes din $\mathbb{R}^p$, $p \in N$ 30

8. *Cs. Halvany* — Elemente booleene în algebra pre-booleană..... 35

9. *Cs. Halvany* — Regiuni triviale ale deformaţiilor infinitezimale 40

10. *E. Roventa* — σ — Algebre şi măsuri Fuzzy 42

11. *I. Luminosu* — Consideraţii teoretice generale asupra instalatorului cu structură anterioară variabilă 51

12. *I. Luminosu* — Argumente teoretice şi experimentale pentru construirea unui insolator cu structură anterioară variabilă 54

13. *P. Crăciun* — Procese moleculare la interfaţa metal-dielectric în fenomenul electro-luminiscenţei policlorurii de vinil 58

BULETIN SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE DE
L'INSTITUT POLYTECHNIQUE „TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA

Série Mathematique—Physique

Tom 25 (39) **Fascicule 1** **Janvier—Juin 1980**

1. *J. E. Pečarić* — On the Čebyšev inequality 5

2. *J. E. Pečarić* — On the Fuch's generalization of the majorization theorem 10

3. *Gh. Babescu* — Über cosinus familien von liniaren stark steitingen operatoren und ihren infinitesimalen generatoren 12

4. *Gh. Bocşan, E. Roventa* — On some fixed point theorems in probabilistic metric spaces 18

5. *Carmencita Urosu* — Sur la latice des congruendes de somme directe des algebres universelles 21

6. O. *Lipovan* — Equivalence and singularity of a gaussian measure on $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{E}^{(p)}_{f_1,\ldots,f_p} \cup \Omega)$ $j=0,2$ spaces 26

7. *O. Lipovan* — Quelques remarques sur les mesures de probabilité definies surles structures générées par la mesure Lebesque-Stieltjes de $\mathbb{R}^p$, $p \in N$ 30

8. *Cs. Hatvany* — Boolean elements in pre-boolean algebras 35

9. *Cs. Hatvany* — Trivial regions of infinitesimal deformations 40

10. *E. Roventa* — — Algèbre et mesures floues 42

11. *I. Luminosu* — Des considerations générales sur l'insolate uravec la structure antérieure variable 51

12. *I. Luminosu* — Des arguments théoriques pour la constuction d'un insolateur avec structure anterieure variable 54

13. *P. Crăciun* — Procèses moléculaires à l'interface métal-diélectrique dans le phénomène d'électroluminiscence du polychlorure de vinyle 58

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 1—1980**

ON THE ČEBYŠEV INEQUALITY

BY

JOSIP E. PECARIC

0. The Čebyšev inequality ist given by :

Theorem A. Let $f, g : [a, b] \to R$ be integrable functions both nondecreasing or both nonincreasing. Furthermore, let $p : [a, b] \to R_0^+$ be an integrable function. Then the following inequality holds

$$\int_a^b p(x)\,dx \int_a^b p(x) f(x) g(x)\,dx \geqq \int_a^b p(x) f(x)\,dx \int_a^b p(x) g(x)\,dx. \tag{0.1}$$

If one of the functions f or g is nondecreasing and the other nonincreasing, then the sign of inequality is reversed in (0.1).

A corresponding discrete analogue is given by :

Theorem B. If $a = (a_1, \ldots, a_n)$ and $b = (b_1, \ldots, b_n)$ are two nondecreasing (or nonincreasing) sequences and if $p = (p_1, \ldots, p_n)$ is a nonnegative sequence then

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i. \tag{0.2}$$

If one of the sequences a or b is nondecreasing and the other nonincreasing, then the sign of inequality is reversed in (0.2).

J.F. Steffensen proved the following result (see, for example, [1, p. 114—115]) :

Theorem C. Let g_1 and g_2 be functions defined on $[a, b]$ such that

$$\int_a^x g_1(t)\,dt \geqq \int_a^x g_2(t)\,dt \quad (\forall x \in [a, b]) \quad \text{and} \quad \int_a^b g_1(t)\,dt = \int_a^b g_2(t)\,dt. \tag{0.3}$$

Let f be an nondecreasing function on $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(t)\, g_1(t)\,dt \leqq \int_a^b f(t)\, g_2(t)\,dt. \tag{0.4}$$

If f is a nonincreasing function on $[a, b]$, the reverse inequality holds.

A corresponding discrete analogue is also given (see, [2] and [3]).

J.F. Steffensen (see, for example, [3]) starting with the Theorem C in the modified form, showed that it includes the following generalization of the Čebyšev's inequality :

Theorem D. If f is a nondecreasing function on $[a, b]$, $p > 0$ on $[a, b]$ and if it is $\forall x \in [a, b]$

$$\frac{\int_a^x p(t)\, g(t)\,dt}{\int_a^x p(t)\,dt} \leqq \frac{\int_a^b p(t)\, g(t)\,dt}{\int_a^b p(t)\,dt} \tag{0.5}$$

then the inequality (0.1) holds.

1. We shall give now some generalizations of the previous results:

Theorem 1. Let f, g_1 and g_2 be functions defined on $[a, b]$. A necessary and sufficient condition for the inequality (0.4) to be holding for every nondecreasing function f is the condition (0.3). The condition (0.3) is necessary and sufficient for the reverse inequality in (0.4) to be holding for every nonincreasing function f.

Proof. The sufficiency is following from the Theorem C. As the functions $x \mapsto 1$, $x \mapsto -1$ and $x \mapsto f(x)$, where $f(t) = -1$ $(t \leqq x)$ $f(t) = 0$ $(t > x)$ $(\forall x \in [a, b])$ are monotonically nondecreasing, we get from (0.4) that the condition (0.3) is also necessary. For prooving the second part of the theorem we can take $f(t) = 1$ $(t \leqslant x)$ $f(t) = 0$ $(t > x)$.

Theorem 2. Let a_i, p_i, q_i $(i = 1, \ldots, n)$ be real numbers. A necessary and sufficient condition which determines that for every nondecreasing sequence $a = (a_1, \ldots, a_n)$ the inequality

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i \leqq \sum_{i=1}^{n} q_i a_i, \tag{1.1}$$

holds, is

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} q_i \quad (k = 1, \ldots, n-1) \text{ and } \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i. \tag{1.2}$$

The condition (1.2) is necessary and sufficient for the reverse inequality in (1.1) to be holding for every nonincreasing sequence a.

Theorem 3. Let the functions f, g, p be defined on $[a, b]$. A necessary and sufficient condition which determines ther foat very noncreasing function f the inequality (0.1) is holding, is

$$\int_a^b p(t)\, dt \int_a^x p(t)\, g(t)\, dt \leqq \int_a^x p(t)\, dt \int_a^b p(t)\, g(t)\, dt, \qquad (\forall x \in [a, b]). \tag{1.3}$$

The condition (1.3) is necessary and sufficient for the reverse inequality in (0.1) to be holding for every nonincreasing function, while the condition (1.3) with the reverse inequality is a necessary and sufficient condition for the inequality (0.1) to be holding for every nonincreasing function f, and also for the reverse inequality in (0.1) to be holding for every nondecreasing function.

Proof. Substituting

$$f(x) = f(x), \quad g_1(x) = p(x) \int_a^b p(t)\, g(t)\, dt, \quad g_2(x) = p(x)\, g(x) \int_a^b p(t)\, dt,$$

and

$$f(x) = f(x), \quad g_1(x) = p(x)\, g(x) \int_a^b p(t)\, dt, \quad g_2(x) = p(x) \int_a^b p(t)\, g(t)\, dt,$$

from the Theorem 1 we obtain the Theorem 3.

Analogously, from the Theorem 2, we obtain

Theorem 4. Let a_i, p_i, q_i $(i=1, \ldots, n)$ be real numbers. A necessary and sufficient condition for the inequality (0.2) be holding for every non-decreasing sequence $a=(a_1, \ldots, a_n)$ is

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{k} p_i g_i \leqq \sum_{i=1}^{k} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i g_i \qquad (lk=1, \ldots, n-1). \tag{1.4}$$

The condition (1.4) is necessary and sufficient for the reverse inequality in (0.2) be holding for every nonincreasing sequence a, while the condition (14) with the reverse inequality is a ncessary and sufficient condition for the inequality (0.2) be holding for every nonincreasing sequence a and also for the reverse inequality in (0.2) be holding for every nondecreasing sequence.

2. In order to prove some interesting special cases of theorems 3 and 4, we shall give firstly the following results:

Theorem 5. If f is a nondecreasing function and p satisfies the conditions

$$0 \leqq \int_a^x p(t)\,dt \leqq \int_a^b p(t)\,dt \qquad (\forall x \in [a, b]), \tag{2.1}$$

and

$$\int_a^c p(t)\,dt > 0, \qquad \int_c^b p(t)\,dt > 0, \quad (c \in [a, b]), \tag{2.2}$$

then, the following inequalities are holding

$$\frac{\int_a^c p(x) f(x)\,dx}{\int_a^c p(x)\,dx} \leqq \frac{\int_a^b p(x) f(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx} \leqq \frac{\int_c^b p(x) f(c)\,dx}{\int_c^b p(x)\,dx}. \tag{2.3}$$

If f is a nonincreasing function, then in (2.3) the reverse inequalities are holding.

Proof. Left-hand side inequality in (2.3) can be written in the form

$$\int_a^c p(x)\,\alpha(x)\,dx \geqq 0, \tag{2.4}$$

where

$$\alpha(x) = \int_a^b p(t)\,(f(t) - f(x))\,dt$$

Using the identity

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = f(\alpha_1)\,S(b) - \int_a^{\alpha_1} S(x)\,df(x) + \int_{\alpha_1}^b Q(x)\,df(x) \quad (\alpha_1 \in [a, b])$$

where

$$S(x) = \int_a^x p(x)\,dx, \qquad Q(x) = \int_x^b p(x)\,dx;$$

we get

$$\int_a^c p(x)\,\alpha(x)\,dx = \alpha(c) \int_a^c p(x)\,dx - \int_a^c S(x)\,d\,\alpha(x)$$

where

$$d\,\alpha(x) = -S(b)\,df(x),$$

$$\alpha(c) = -\int_a^c S(x)\,df(x) + \int_c^b Q(x)\,d\,f(x).$$

So,

$$\int_a^c p(x)\,\alpha(x)\,dx = Q(c)\int_a^c S(x)\,df(x) + S(c)\int_c^b Q(x)\,df(x).$$

Basing on (2.1), it is evident that (2.4) holds.

Remark 1. The inequality (2.3) had been proved by P. Lovera in [4] (see also [3]) for positive function p and positive nondecreasing function f. From the Theorem 5, for $p(x)\equiv 1$, we obtain the result of T.E. Mott [5] (see also [1, p. 9]).

In a complete analogous way, using the identity

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i = S_n a_k + \sum_{i=1}^{k-1} S_i (a_i - a_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} Q_i (a_i - a_{i-1}) \qquad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

where

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} p_i, \qquad Q_k = \sum_{i=k}^{n} p_i,$$

we can prove the following.

Theorem 6. Let $x=(x_1, \ldots, x_n)$ be a nondecreasing sequence and real numbers $p_i\ (i=1, \ldots, n)$ satisfy the conditions

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{k} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \quad (k=1, \ldots, n-1) \tag{2.5}$$

and

$$\sum_{i=1}^{r} p_i \neq 0, \qquad \sum_{i=r+1}^{n} p_i \neq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i > 0 \qquad (r \in I,\ I=\{1, \ldots, n\}), \tag{2.6}$$

then the following inequalities are holding

$$\frac{\sum_{i=1}^{r} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{r} p_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \leqslant \frac{\sum_{i=r+1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=r+1}^{n} p_i}. \tag{2.7}$$

If, instead of (2.5), holds

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} p_i \quad (k=1, \ldots, n-1), \tag{2.8}$$

then the second inequality in (2.7) is holding, whereas the first one holds with the reverse inequality; and if it is holding

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant \sum_{i=k+1}^{n} p_i \qquad (k=1, \ldots, n-1), \tag{2.9}$$

then the first inequality in (2.7) is holding whereas the second one has the reverse inequality.

If x is a nonincreasing sequence, then the reverse inequalities are holding.

Remark 2. It is obvious that for the inequalities in the form (2.4) (i.e. (1.3)), the conditions (2.2) and (2.6) are not necessary.

Using Theorems 5,6 und Remark 2, by analogy to proof of Theorem 1, from Theorems 3 and 4 we get :

Theorem 7. Let function p satisfies condition $\int_a^b p(x)\,dx \geqq 0$. Condition (2.1) is necessary and sufficient that for any functions f and g, monotonous in the same sense, inequality (0.1) is valid ; in the same way, opposite inequality (0.1) is valid if f and g are any functions monotonous in opposite sense.

Theorem 8. Let $p_1, \ldots, p_n \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \geqq 0\right)$ be real numbers. The condition (2.5) is necessary and sufficient that any sequences $a=(a_1, \ldots, a_n)$ and $b=(b_1, \ldots, b_n)$, monotonous in the same sense, satisfy inequality (0.2) ; in the same way the reverse inequality is satisfied in (0.2) for any sequences a and b, monotous in opposite sense.

The conditions (2.8) or (2.9) are necessary and sufficient that any sequences a and b monotonous in the opposite sense, satisfy inequality (0.2) ; in the same way the reverse inequality is satisfied in (0.2) for any sequences a und b, monotonous **in the same** sense.

The first part of Theorem 8 is proved by T. Popoviciu in [6].

REFERENCES

1. D. S. Mitrinović (In cooperation with P.M. Vasić) : Analytic inequalities. Berlin. Heidelberg-New York, 1970.
2. M. Marjanovic, Some inequalities with convex functions. Publ. Inst. Math. (Beograd). 8 (22) (1968), 66–68.
3. D. S. Mitrinović, and P.M. Vasić, History, variations and generalisations of the Cebyšev inequality and the question of some priorities. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. N 461 – N 497 (1974), 1–30.
4. P. Lovera, Sulla diseguaglianza di Jensen-Steffensen. Atti. Accad. sci. Torino 91, 348–352 (1957).
5. T. E. Mott, On the quotient of monotone functions. Amer. Math. Monthly 70 (1963). 195–196.
6. T. Popovieiu, On an inequality (Romanian). Gaz. Mat. Fiz. A8 (64), 451–461 (1959).

Gradevinski fakultet

Beograd,

Bulevar revolucije 73.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) Fascicola 1—1980

ON THE FUCHS'S GENERALIZATION OF THE MAJORIZATION THEOREM

BY

JOSIP E. PEČARIĆ

Definition. Let $x_1, \ldots, x_n$ and $y_1, \ldots, y_n$ be real numbers. A vector $y=(y_1, \ldots, y_n)$ is said to be majorized by a vector $x=(x_1, \ldots, x_n)$, in symbols $x>y$ or $y<x$, if,after possible reordering of its components so that

$$x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n \quad \text{and} \quad y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n,$$

we have

$$\sum_{r=1}^{k} x_r \geqslant \sum_{r=1}^{k} y_r \quad \text{for } k=1, \ldots, n-1 \tag{1}$$

and

$$\sum_{r=1}^{n} x_r = \sum_{r=1}^{n} y_r. \tag{2}$$

If condition (2) is replaced by

$$\sum_{r=1}^{n} x_r \geqslant \sum_{r=1}^{n} y_r \tag{3}$$

we write $x \gg y$ or $y \ll x$.

G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya [1] (see also [2, *p.* 164]) proved the following :

Theorem A. (Majorization theorem). A necessary and sufficient condition in order that

$$\sum_{r=1}^{n} f(x_r) \leqslant \sum_{r=1}^{n} f(y_r) \tag{4}$$

holds for every convex function f on I, with $x_r, y_r \in I$, is that $x<y$.

The following theorem is due to M. Tomić [3] :

Theorem B. A necessary and sufficient condition for inequality (4) to hold for every convex and increasing function f is $x \ll y$.

L. Fuchs [4] has proved the following result :

Theorem C. Suppose that

$$x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n, \quad y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n$$

and

$$\sum_{r=1}^{k} p_r x_r \leqslant \sum_{r=1}^{k} p_r y_r \ (k=1, \ldots, n-1); \quad \sum_{r=1}^{n} p_r x_r = \sum_{r=1}^{n} p_r y_r, \tag{6}$$

where $p_1, \ldots, p_n$ are arbitrary real numbers ; then for any convex $f(x)$

$$\sum_{r=1}^{n} p_r f(x_r) \leqslant \sum_{r=1}^{n} p_r f(y_r). \tag{7}$$

In monograph [2, p. 165], this result is given in the form of the following theorem :

Theorem C1. Inequality (7) holds for every convex function f and for arbitrary real numbers $p_1, \ldots, p_n$ if and only if (5) and (7) hold.

Proof of Theorem C1 is given by C.O. Imoru in [5].

The assertion, however, that inequality (7) is valid only if the conditions (5) and (6) are fulfilled, is not correct. We shall give contra-example in the following way : consider inequality :

$$-f(4)-f(3)+3f(2)-2f(1)+f(0)\leqq -f(0)-f(0)+3f(0)-2f(0)+f(-3). \tag{8}$$

The conditions (5) and (6) are satisfied and (8) is valid for every function convex on I ($[-3, 4]\subseteq I$).

Reorder now the inequality (8), *i.e.* write this one in the form

$$-f(4)-f(3)+3f(2)-2f(1)+2f(0)\leqq -f(-3)-f(-3)+3f(-3)-2f(-3)+ +2f(-3). \tag{8'}$$

As the inequality (8′) is valid for every convex function, on the basis of Theorem C1, follows that conditions (6) must be satisfied. This is not correct.

Remark that one interesting proof of Theorem *C* (there the conditions (6) are given in modified form) is given by P.S. Bullen, P.M. Vasić and Lj. Stanković in [6]. They are given and analogous generalization of Theorem B :

Theorem D. Let x_i, y_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ be such real numbers that (5) and

$$\sum_{r=1}^{k} p_r x_r \leqq \sum_{r=1}^{k} p_r y_r \quad (k=1, \ldots n) \tag{9}$$

hold. Then for every nondecreasing convex function f the inequality (7) is valid.

Remark. In [6] are given and other results which are analogous to Theorems *C* and *D*.

We shall prove the following generalization Theorem *A* :

Theorem 1. Let $x_1\geqq \ldots \geqq x_n$, $y_1\geqq \ldots \geqq y_n$ and $p_i\geqq 0$ $(i=1, \ldots, n)$ be real numbers. A necessary and sufficient condition in order that (7) holds for every convex function f is (6).

Proof. The sufficiency is following from the Theorem *C*. Let us now prove that condition (6) is also necessary. Functions $x\to x$ and $x\to -x$ are convex on an arbitrary segment, thus, from (7), we get the second relation in (6). Next, let

$$f(x)=0 \text{ for } x\leqq y_r \quad \text{and} \quad f(x)=x-y_r \text{ for } x>y_r.$$

Then $f(x)$ is continous and convex in any interval, and $f(x)\geqq 0$, $f(x)\geqq x-y_r$. Hence

$$\sum_{i=1}^{r} p_i x_i - y_r \sum_{i=1}^{r} p_i \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i f(y_i) = \sum_{i=1}^{r} p_i y_i - y_r \sum_{i=1}^{r} p_i,$$

which is (6). So Theorem 1 is proved.

By analogy we can prove :

Theorem 2. Let $x_1\geqq \ldots \geqq x_n$, $y_1\geqq \ldots \geqq y_n$ and $p_i\geqq 0$ $(i=1, \ldots, n)$ be real numbers. A necessary and sufficient condition in order that (7) holds for every nondecreasing convex function f is (9).

REFERENCES

1. G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, Some simple inequalities satisfied by convex functions. Messenger Math. 58, 145–152 (1928/29).
2. D. S. Mitrinović, (In cooperation with P. M. Vasić), Analytic Inequalities. Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
3. M. Tomić, Gauss' theorem on the centroid and its application (Serbian). Bul. Soc. Math. Phys. Serbie 1, N 1 (1949), 31–40.
4. L. Fuchs, A new proof of an inequality of Hardy-Littlewood-Polya. Mat. Tidsskr. B., 1947, 53–54.
5. C. O. Imoru, The Jensen-Steffensen inequality. These Publications N 461–N 497 (1974), 91–105.
6. P. S. Bullen, P. M. Vasić and Lj. Stanković, A problem of A. Oppenheim. Ibid. N 412–N 460 (1973), 21–30.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 25 (39) Fascicola 1—1980

ÜBER KOSINUS FAMILIEN VON LINIAREN STARK STETIGEN OPERATOREN UND IHREN INFINITESIMALEN GENERATOREN

von GH. BABESCU

Es sei X ein Banachraum und $B(X)$ die Banachalgebra der liniaren und beschränkten Operatoren auf X. Eine Familie von liniaren beschränkten Operatoren mit einem Parameter $\{C(t),\ t \in R\}$, welche den Banachraum in sich selbst abbilden, wird eine in X stark stetige „Kosinus-familie" genannt, wenn

i) $C(s+t)+C(s-t)=2C(s)\,C(t),\quad s,\ t \in R$;

ii) $C(0)=I$ (I — Einheitsoperatoren);

iii) $C(t)\,x$ ist in t stetig auf R für jedes bestimmte Element $x \in X$ ([7]).

Ist $\{C(t),\ t \in R\}$ eine in X stark stetige „Kosinus-familie", so ist die Familie $\{S(t),\ t \in R\}$, definiert durch

$$(*) \qquad S(t)\,x=\int_0^t C(s)\,x\,ds,\quad x \in X,\ t \in R$$

ebenfalls eine Familie von Operatoren in X, mit einem Parameter.

Das Studium von Funktionen deren Werte Kosinusoperatoren sind, wurde von M. Sova ([8]) eingeleitet, aber die grundlegende und umfangreichste Arbeit über Kosinusoperatoren ist jene von *H.O.* Fattorini, ([1]). Einen wichtigen Beitrag auf diesem Gebiet vollbrachte auch B. Nagy ([7]), K. Kisynski ([5]), E. Giusti ([2]), J. Goldstein ([3]), G. Da Prato ([2]), D. Lutz ([6]), S. Kurepa ([4]), u.a.

Diese Arbeit setzt sich als Ziel eine stark stetige Familie von liniaren Kosinus Operatoren und ihre infinitesimalen Generatoren zu charakterisieren, der letzte Satz bezieht sich auf die Äquivalenz der infinitesimalen Generatoren, die auf drei Arten ausgedrückt werden.

Satz 1. Es sei $\{C(t),\ t \in R\}$ eine Familie in X stark stetigen Kosinusoperatoren. Dann sind folgende Beziehungen erfüllt:

$$C(t)=C(-t),\quad t \in R; \tag{1.1}$$

$C(s)$, $S(s)$, $C(t)$ und $S(t)$ sind kommutativ für jedes fixierte Element $x \in X$; (1.2)

$S(t)\,x$ ist in t stetig auf R für jedes bestimmte Element $x \in X$; (1.3)

$$S(s+t)+S(s-t)=2S(s)\,C(t),\quad s,\ t \in R; \tag{1.4}$$

$$S(-t)=-S(t),\quad t \in R; \tag{1.5}$$

es existieren die Konstanten $K \geqslant 1$ und $\omega \geqslant 0$, so daß $\|C(t)\| \leqslant Ke^{\omega|t|}$, $t \in R$; (1.6)

$$\| S(t) - S(\hat{t}) \| \leqslant K \int_{\hat{t}}^{t} e^{\omega |s|} ds, \quad t, \hat{t} \in R; \tag{1.7}$$

für jedwelches Element $\omega \in R$ ist die Menge $\{e^{-\omega |t|} C(t) x, \ t \geqslant 1\}$ beschrankt in X; (1.8)

$$S(s+t) = S(s) C(t) + S(t) + S(t) C(t) \qquad s, t \in R. \tag{1.9}$$

Beweis. Für $s=0$, folgt aus i) indem wir ii) in Betracht ziehen, daß (1.1) stattfindet. Um (1.2) zu verifizieren vertauschen wir in i) s mit t und erhalten, indem wir (1.1) berücksichtigen, $C(s) C(t) = C(t) C(s)$, $s, t \in R$.

Benützen wir nun die Beziehung (*) so erhalten wir $C(t) S(t) = S(t) C(t)$, $t \in R$; ähnlich erhalten wir auch die anderen, mit Hilfe der Beziehung (*). Die Behauptung (1.3) erhält man aus (*), in dem man die Tatsache beachtet, daß die Familie $\{C(t), \ t \in R\}$ in X stark stetig ist, ([7]). Die Beziehung (1.4) erhält man aus i), indem man in bezug auf s integriert, die Beziehung (1.5) folgt aus (1.4), in dem $s=0$ genommen wird und indem man ii) in Betracht zieht. Um (1.6) zu verifizieren wählen wir K, $\omega \in R$ so daß:

(*a*) $\| C(t) \| \leqslant K e^{\omega |t|}$, $t \in [0, 1]$, und

(*b*) $2 \| C(1) \| e^{-\omega} + 2e^{-2\omega} \leqslant 1$, ([1]), Hilfssatz 5.5).

Setzen wir nun voraus, daß (*a*) gültig ist für $t \leqslant n$, dann erhalten wir aus i) für $s=1$, indem man (*b*) berücksichtigt: $\| C(t+1) \| \leqslant 2 \| C(1) \| - \| C(t) \| + + \| C(t-1) \| \leqslant K e^{\omega (t+1)}$, bedeutet, daß (a) ebenfalls stattfindet für $t \leqslant n+1$. Ein einfacher Gedankengang mit Hilfe der Induktion zeigt, daß (*a*) für jedwelchen $t \geqslant 0$ stattfindet und indem man (1.1) berücksichtigt sogar für jedwelchen $t \in R$, daraus folgt, daß (1.6) gültig ist. Die Beziehung (1.7) erhält man mit Hilfe von (1.6), indem man die Beziehung (*) beachtet, die Behauptung (1.8) folgt sofort aus (1.6). Um (1.9) zu verifizieren, benützen wir (1.4), wo wir t mit s ersetzen. Beachten wir (1.5) und addieren nachher die erhaltenen Beziehungen, folgt (1.9) was zu beweisen war.

Bemerkung 1. Die Beziehung (1.4) kann sofort aus (1.9) erhalten werden, indem man (1.1) und (1.5) beachtet.

Es ist bekannt ([6]) daß der infinitesimale Generator einer Kosinus-familie von stark stetigen liniaren Operatoren $\{C(t), \ t \in R\}$, der Operator $A : D(A)$ $X \to X$ ist, der mit Hilfe der Beziehung (**) $Ax = C''(0) x$ definiert wird wo $D(A) = \{x \in X : C(\ ) x \in C^2(R, X)\}$.

Nun können wir folgendes aussagen:

Satz 2. Ist $\{C(t), \ t \in R)$ eine Kosinus familie, stark stetig in X, mit den infinitesimalen Generatoren A, so ist;

A ein geschlossener, dichter Operator, der auf X definiert ist; (2.1)

ist $x \in X$ und, $s, t \in R$, so ist der Vektor y mit Hilfe folgender Beziehung definiert: $y = \int_t^s S(u) x du \in D(A)$ und $Ay = C(s)x - C(t) x$; (2.2)

wenn $x \in X$ und $s, t \in R$, so ist $y = \int_0^s \int_0^t C(u)\, C(v)\, x\, du\, dv \in D(A)$ und

$$Ay = [C(s+t)\, x - C(s-t)\, x]/2; \tag{2.3}$$

wenn $x \in X$, so ist die Funktion $S(t)\, x \in C^1(R, X)$; (2.4)

wenn $x \in D(A)$, so ist $C(t)\, x \in D(A)$ und $C''(t)\, x = AC(t)\, x = C(t)\, Ax$; (2.6)

wenn $S(t)\, x \in C^1(R, X)$, so ist $\lim_{t \to 0} AS(t)\, x = 0$; (2.7)

wenn $S(t)\, x \in C^1(R, X)$, so ist $S(t)\, x \in D(A)$ und $S''(t)\, x = AS(t)\, x$; (2.8)

wenn $x \in D(A)$, so ist $S(t)x \in D(A)$ *und* $AS(t)\, x = S(t)\, Ax$; (2.9)

$$C(t+s) - C(t-s) = 2AS(t)\, S(s), \quad t, s \in R; \tag{2.10}$$

wenn $\{C(t), t \in R\}$ (1.8) verifiziert, so folgt für jedwelchen $\lambda \in C$, mit $\lambda \in C$, mit $Re\, \lambda > \omega$, daß $\lambda^2 \in \rho(A)$, ($\rho(A)$ – die resolvente Menge von A) und $\lambda\, T(\lambda^2; A)\, x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, C(t)\, x\, dt$, aber $R(\lambda^2; A)$ ist analitisch in der Halbebene $\mathrm{Re}\, \lambda \geqslant \omega$. (2.11)

ist $\{C(t), t \in R\}$ eine Kosinusfamilie, die in X stark stetig ist, so ist der Operator $\tilde{A} : X \to X$, definiert durch: $\tilde{A}x = \lim_{t \to 0} [C(2t)\, x - x]/2t^2$, für jene Elemente $x \in X$, für welche dieser Grenzwert existiert, der infinitesimale Generator der Kosinusfamilie von Operatoren $\{C(t), t \in R\}$. (2.12)

Beweis. Der Beweis von (2.1) erscheint in ([1]), Hilfsatz 5.4).

Die Bezeihung (2.2) erhält man indem man (1.4) und (*) beachtet: $C(t)\, S(s) = C(t) \int_0^s C(u)\, x\, du$, von wo $C(r)\, y = \int_t^s C(t)\, S(u)\, x\, du = \frac{1}{2} \int_t^s [S(u+r)\, x + S(u-r)\, x]\, du$, und daraus folgt, daß

$$C'(r)\, y = \frac{1}{2} \int_t^s [C(u+r)\, x - C(u-r)\, x]\, du = \frac{1}{2} \left[\int_{r+t}^{s+r} C(u)\, x\, du - \int_{t-r}^{s-r} C(u)\, x\, du \right.$$

und machen wir die Ableitung der obigen Gleichheit, so erhalten wir:

$$C''(r)\, y = \frac{1}{2} [C(s+r)\, x - C(r+t)\, x + C(s-r)\, x - C(t-r)\, x],$$

und von hier

$$C''(0)\, y = C(s)\, x - C(t)\, x, \quad s, t \in R.$$

Um (2.3) zu verifizieren, beachten wir i) und (1.1), daraus erhält man:

$$C(r)\, y = \int_0^s \int_0^t C(r)\, C(u)\, C(y)\, x\, d\, u\, dv = \frac{1}{2} \int_0^s \int_0^t [C(r+u) + C(r-u)]\, C(v)\, x\, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^s \left[\int_r^{r+t} C(u)\, C(v)\, dx\, du\, dv + \int_{r=t}^{r} C(u)\, C(v)\, x\, du\, dv \right] = \int_0^s \int_{r-t}^{r+t} C(u)\, C(v)\, du\, dv,$$

daraus folgt

$$C'(r)\,y=\frac{1}{2}\int_0^s [C(r+t)-C(r-t)]\,C(v)\,x\,dv=\frac{1}{4}\left[\int_{r+t}^{r+t+s} C(v)\,x\,dv+\right.$$

$$+\int_{r+t-s}^{r+t} C(v)\,x\,dv-\int_{r-t}^{r-t+s} C(v)\,x\,dv-\left.\int_{r-t-s}^{r-t} C(v)\,x\,dv=\right.$$

$$=\frac{1}{4}\left[\int_{r+t-s}^{r+t+s} C(v)\,x\,dv-\int_{r-t=s}^{r-t+s} C(v)\,x\,dv\right].$$

Machen wir die nachfolgende Ableitung, so erhalten wir:

$$C''(r)\,y=\frac{1}{4}[C(r+t+s)\,x-C(r+t-s)\,x-C(r-t+s)\,x+C(r-t-s)\,x],$$

also

$$C''(0)\,y=\frac{1}{2}[C(t+s)\,x-C(s-t)\,x].$$

Die Behauptung (2.4) folgt aus i) und (*) und der Gleichheit $C(s)\,S(t)\,x=$

$=\int_0^t C(r)\,C(z)\,x\,dr=\frac{1}{2}\int_{s-t}^{s+t} C(r)\,x\,dr$, und daraus ergibt sich:

$$C'(s)\,S(t)\,x=\frac{1}{2}[C(s+t)\,x-C(s-t)\,x].$$

Damit man (2.5) erhält, wird die letzte Gleichheit noch einmal abgeleitet in bezug auf s und nachher $s=0$ genommen, dadurch erhält man:

$$C''(0)\,S(t)\,x=C'(t)\,x.$$

Die Behauptung (2.6) erhält man indem man von i) ausgeht, welche noch anders geschrieben werden kann:

$$\frac{1}{2h^2}[C(s+h)-2C(s)+C(s-h)]\,x=C(s)\,\frac{1}{h^2}[C(h)-I]\,x=\frac{1}{h^2}[C(h)-I]\,C(s)\,x,$$

und hier machen wir daß $h-0$, wobei wir (2.6) erhalten.

Um (2.7) zu verifizieren, bemerken wir zuerst, daß die Hypothese $S(t)\,x\in$ $\in C^1(R, X)$ bedingt, daß $C'(t)\,x$ eine in Bezug auf t stetige Funktion ist und aus (2.5) folgt, daß

$$\lim_{t\to 0} A\,S(t)\,x=\lim_{t\to 0} C'(t)\,x=C'(0)\,x.$$

Um zu zeigen, daß $C'(0)\,x=0$ ist, werden wir auf zwei Arten den Vektoren $C'(0)\,x$, indem man (1.1) beachtet, schreiben und wir erhalten die Tatsache, daß er mit seinem entgegengesetzten Vektoren $-C'(0)\,x$ zusammenfällt, daraus folgt $C'(0)\,x=0$, also findet (2.7) statt.

Schließlich ist $C'(0)\,x=\lim_{h\to 0}[C(h)\,x-x]/h=\lim_{h\to 0}[C(-h)\,x-x]/(-h)=$

$=-\lim_{h\to 0}[C(h)\,x-x]/h=-C'(0)\,x.$

Die Behauptungen (2.8) und (2.9) sind im Hilfssatz (5.4) in ([1]) enthalten. Die Beziehung (2.10) erhält man aus (1.4) indem man nach t ableitet und indem man (2.5) und (.12) beachtet. Um die Genauigkeit von (2.11) zu zeigen, bezeichnen wir $R(\lambda)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}C(t)x\,dt$ und integrieren dies zweimal partiell. Beachten wir auch (2.5), folgt daß $(\lambda^2-A)R(\lambda)x=\lambda x$. Da A geschlossen ist, folgt daß für $x\in X$, $R(\lambda)x\in D(x)$ und deshalb findet die vorherige Gleichheit statt. Da A mit $C(t)$ vertauscht werden kann (siehe (2.6) folgt, daß A auch mit $R(\lambda)$ vertauscht werden kann. Daß $R(\lambda^2;A)$ analytisch ist in der Halbebene $\mathrm{Re}\,\lambda>\omega$, folgt aus Satz (1.4), ([1]).

Um (2.12) zu beweisen, bezeichnen wir mit $y=\lim_{t\to 0}[C(2t)x-x]/2t^2$ und wir werden zeigen, daß $x\in D(A)$ und $\lim_{t\to 0}[C(2t)x-x]/2t^2=Ax$. Deshalb definieren wir den Vektoren $x_t=\frac{1}{t_2}\int_0^t\int_0^t C(s)C(r)x\,ds\,dr$, und aus (2.3) $x_t\in D(A)$ und $Ax_t=[C(2t)x-Ix]/2t^2$.

Die Behauptung ergibt sich aus der Tatsache, daß A geschlossen ist und $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^t C(s)C(r)\,ds\,dr=x,\quad x\in X$.

Wir haben also erhalten, daß $\tilde{A}=A$ auf dem Bereich von $\tilde{A}$. Setzen wir nun voraus, daß $x\in D(A)$ und $Ax=y$ ist. Weil für $x\in X$, $C(t)x\to x$ wenn $t\to 0$, für einen gegebenen $\varepsilon>0$, existiert $\delta>0$, so daß für einen beliebigen $u\in(0,\delta)$ folgt $\|C(u)Ax-Ax\|<\varepsilon$. Ist $0<|2t|<\delta$, so ist

$$\left\|\frac{2}{t^2}[C(2t)x-x]-y\right\|=\left\|\frac{2}{t^2}\int_0^{2t}\int_0^s[C''(u)-Ax]\,du\,ds\right\|\leqslant\frac{2}{t^2}\int_0^{2t}\int_0^s\|C(u)Ax-Ax\|\,du\,ds<\varepsilon,$$

also auch (2.12) findet stat w.z.b.w.

Wir sahen, daß der infinitesimale Generator einer Kosinusfamilie von stark stetigen Operatoren $\{C(t),\ t\in R\}$ mit Hilfe der vorherigen Beziehung (*) definiert ist ([6]). M. Sova ([8]), hat den infinitesimalen Generatoren A, von einer solchen Familie, auf folgende Art definiert: $A=\lim_{t\to 0}\frac{2[C(t)-I]}{t^2}$. Aber für beliebige Funktionen ist die Tatsache bekannt, daß die Ableitung zweiter Ordnung ausgedrückt werden kann entweder mit Hilfe der Differenzen zweiter Ordnung, oder mit Hilfe der zentralen Differenzen zweiter Ordnung. Ziehen wir nun die Definitionsbeziehung (**) in Betracht, so kann der infinitesimale Generator einer Kosinusfamilie auf zwei Arten, mit Hilfe dieser Differenzen zweiter Ordnung, ausgedrückt werden.

Der folgende Satz setzt sich als Ziel einen Zusammenhang zu bestimmen zwischen den infinitesimalen Generatoren einer Kosinusfamilie von stark liniaren Operatoren.

Satz 3. Es sei $\{C(t),\ t\in R\}$ eine Kosinusfamilie von stark stetigen liniaren Operatoren in X. Gibt es folgende Operatoren: $A: D(A)\subseteq X\to X$, definiert

durch die Beziehung $Ax=\lim_{t\to 0}\frac{2[C(t)x-x]}{t^2}$ $B_1: D(B_1)\subseteq X\to X$, definiert durch die Beziehung $B_1x=\lim_{t\to 0}\frac{[C(2t)-2C(t)+I]x}{t^2}$ und $B_2: D(B_2)\subseteq X\to X$, definiert durch die Beziehung $B_2x=\lim_{t\to 0}\frac{[C(-2t)-2I+C(2t)]x}{t^2}$ so ist $Ax=B_1x=B_2x$ für jedes beliebige bestimmte Element $x\in D(A)\cap D(B_1)\cap D(B_2)$.

Beweis. Existiert A, so ist $\lim_{t\to 0}\frac{[C(2t)-I]x}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{[C(t)-I]x}{t^2/4}=2\lim_{t\to 0}\frac{2[C(t)-I]x}{t^2}=$ $=2Ax$, für $x\in D(A)$ aber bestimmt. Daraus folgt $Ax=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{[C(2t)-I]x}{t^2}-\right.$ $\left.-\frac{2[C(t)-I]x}{t^2}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{[C(2t)-2C(t)+I]x}{t^2}=B_1x$, $x\in D(B_1)$, aber bestimmt, dadurch ist $Ax=B_1x$ für jedes bestimmte Element $x\in D(A)\cap D(B_1)$. Benützen wir nun die Bedingung (1.1) und ii), so erhalten wir: $B_2x=$ $=\lim_{t\to 0}\frac{[C(-2t)-2C_0(o)+C(2t)]x}{4t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{[2C(2t)-2C(0)]x}{4t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{[C(2t)-I]x}{2t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{[C(t)-I]}{t^2/2}=$ $=\lim_{t\to 0}\frac{2[C(t)-I]x}{t^2}=Ax$, $x\in D(A)\cap D(B_2)$, dadurch ist $B_2=A$. Aus den Gleichheiten $Ax=B_1x$ und $B_2x=Ax$, für jedes bestimmte Element $x\in D(A)\cap D(B_1)\cap D(B_2)$, folgt die Gültigkeit des Satzes.

Bemerkung 2. Die Bereiche $D(A)$, $B(B_1)$, $D(B_2)$ sind gebildet von jenen Elementen $x\in X$, für welche die betreffenden Grenzwerte in der starken Topologie der Operatoren ([9]) vorhanden sind.

LITERATURVERZEICHNIS

1. H. O Fattorini, Ordinyry differential equations in linear topological spaces, I, J. Differential Equations, 5 (1969), 72–105.
2. G. DA Prato and E. Giusti, Una caratterizatione dei generatori di fuzioni coseno astratte, Boll. Unione Mat. Italiana, 22 (1967), 357–362.
3. J. Goldstein, On the convergence and approximation of cosine functions, Aeq. Math., 11 (1974), 201–205.
4. S. Kurepa, Remark on similarity of operators, Glasnik Matematicki, 13 (33) (1978) 75–80.
5. J. Kisynski, On operator-valued solutions of d'Alembert's functional equation, I. Colloquium Math., 23 (1971), 107–114.
6. D. Lutz, Which operators generate cosine operator functions, Atti della Nazi dei Lincei, Rendiconti, vol. LXIII– Fasc. 5, Nov. 1977.
7. B. Nagy, Cosine operator functions and the abstract Cauchy problem, Periodica Math. Hungar, 7 (3) (1976), 15–18.
8. M. Sova, Cosine operator functions, Rozpravy Mat., 49 (1966), 1–47.
9. K. Iosida, Funcţionalnîi analiz, Moskba, 1967.

BIBLIOTECA INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI MOŞANI 1048

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 1—1980**

ON SOME FIXED POINT THEOREMS IN PROBABILISTIC METRIC SPACES

BY

GH. BOCŞAN und E. ROVENŢA

1. The probabilitstic metric spaces (briefly PM-spaces) have been introducedby K. Menger [5]. Important contributions to the development of their theory are due to B. Schweizer and A. Sklar [7], O. Onicescu [6] A.N. Sorotnov [8], etc.

In this note a generalization of Furi's and Vignoli's theorem [4] to the probabilistic motric spaces is given. In special case the theorem from [9] is obtained.

Let $(S, \mathcal{F})$ be a PM-spaces [7] and A a subset of S. The function $D_A(\cdot)$ defined by :

$$D_A(x)=\sup_{t<x} \inf_{p,q\in A} F_{pq}(t)$$

is called the probabilistic diameter of A [3]. $A\subset S$ is say the probabilistic semibounded subset if $\sup_{x>0} D_A(x)>0$. A probabilistic semibounded set A such that $\sup_{x>0} D_A(x)=1$ is called probabilistic bounded. Let A be a probabilistic semibounded subset of S and for each $x\in R$ let

$$K_{A,\varepsilon}=\{\varepsilon>0\,;\ \exists\,(A_i)_{i\in j},\ j-\text{finite},\ A\subseteq\bigcap_{i\in j}A_i \qquad D_{Ai}(x)\geqslant\varepsilon\}$$

The function $\alpha_A(\cdot)$ defined by :

$$\alpha_A(x)=\sup_{\tau} K_{A,\varepsilon}$$

is called the Kuratowski's function of A. It is easy to show that the Kuratowski's function of the probabilistic semibounded subset has same the properties with the Kuratowski's function of the probabilistic bounded subsot by [2]. The results from [2] have hold and in this case.

A continuous mapping $T: S\to S$ is say probabilistic densyfying [1] if for every the subset A of S such that $\alpha_A<H$ we have $\alpha_{T(A)}>\alpha_A$. The terminology is as in [9].

Let Δ be set of the functions $F:\mathbb{R}\to[0, 1]$ which are the leftcontinuous $\sup_{x\in\mathbb{R}} F(x)\leqslant 1$, $\inf_{x\in\mathbb{R}} F(x)=0$ such that $F(0)=0$ Δ is partially ordered by „$F\subseteq G$ iff $F(x)\leqslant G(x)$ for all $x\geqslant 0$".

In [2] it is shown that if

$$K_A=\{F\in\Delta:\ \exists\,(A_i)_{i\in j},\ j-\text{finite},\ A\subseteq\bigcup_{i\in j}A_i,\ D_{Ai},\geqslant F\}$$

then $\alpha_A = \sup_F K_A$ (in respect with tho ordered by Δ). A mapping $\mu : \Delta \to \Delta$ is say left-continuous if $\sup_{G<F} \mu(G) = H$ for every $F \in \Delta$. μ is said noncreasing if $F_1 \leqslant F_2$ implies that $\mu(F_1) \geqslant \mu(F_2)$.

If $\lambda > 0$ and $F \in \Delta$, then λF is the function by Δ definied from $(\lambda F)(x) = F\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ for all x in R. The notation $F_{\varepsilon, \lambda}$ will be reserved for he function defined by

$$F_{\varepsilon, \lambda} = \begin{cases} 0 & x \leqslant \varepsilon \\ 1-\lambda & x > \varepsilon \end{cases} \qquad (\varepsilon > 0, \quad 0 < \lambda < 1)$$

For F in Δ we write $F > F_{t, \lambda}$ iff $F(x) > 1-\lambda$ and $F > F$ iff $F(x) \geqslant 1-\lambda$.

2. Theorem 2.1. Let (S, F, τ) be a complete Menger space with the left-continuous t-function and let $T : S \to S$ be a probabilistic densyfying mapping. Then any bounded sequence $\{p_n\}$ such that $F_{pn T p n} \to H$ is compact and all the limit points of $\{p_n\}$ are fixed points for T.

Proof. Let A be a bounded set of S and for F in Δ let

$$S(A ; F_{\varepsilon, \lambda}) = \{p \in S ; \sup_{q \in A} F_{p, q} > F_{\varepsilon, \lambda}\}$$

We show that :

$$\alpha_S(A; F_{\varepsilon, \lambda}) \geqslant \tau(\alpha , \tau(F_{\varepsilon, \lambda}, F_{t, \lambda})) \quad (*) \qquad (\%*$$

If G is arbitrary in K_A [1] and $(A_i)_{i=1}^n$ is a finite cover of A such that $D_{Ai} \geqslant G$ then it is easy to shown that :

$$B_i = \rho(A_i ; F_{\varepsilon, \lambda}) \quad i = 1, 2, \ldots n$$

is a finite cover of $S(A ; F_{t, \lambda})$. For p, q in $S(A_i, F_{t, \lambda})$ there exists r, respectively s in A_i such that $F_{p, x} > F_{\varepsilon, \lambda}$ and $F_{q, s} > F_{\varepsilon, \lambda}$

$$F_{p, q} \geqslant \tau(F_{p, r}, \tau(F_{r, s}, F_{s, q})) \geqslant \tau(F_{t, \lambda}, \tau(G, F_{t, \lambda})).$$

From the properties of τ it results that

$$D_S(A_i ; F_{\varepsilon, \lambda}) \geqslant \tau(G, \tau(F_{\varepsilon, \lambda}, F_{t, \lambda}))$$

that is :

$$\tau(G, \tau(F_{\varepsilon, r}, F_{t, \lambda})) \in \in K_S(A_i, F_{t, \lambda}).$$

Hence $\tau(G, \tau(F_{\varepsilon, \lambda}, F_{t, \lambda})) \leqslant \alpha_S(A_i, F_{\varepsilon, \lambda})$ for every G in K_A. Since τ is left-continuous the relation (*) is proved. Put $M = \{p_n, n = 1, 2 \ldots\}$; so that, $T(M) = \{T(p_n) n = 1, 2, \ldots\}$. Since $F_{pn T p n} \to H$ it follows that for each $F_{\varepsilon, \lambda}$ in Δ $S(T(M), F_{q, \lambda})$ contains all but a finite number of elemente of M, therefore by (*) it result that $\alpha_M \geqslant \alpha_S, (T(M) \; F_{\varepsilon, \lambda}) \geqslant \tau(\alpha_{T(M)}, \tau(F_{\lambda, \varepsilon}, F_{q, \lambda}))$ hence $\alpha_M \geqslant \alpha_{T(M)}$. Since T is densyfying, this implies that $\alpha_M = H$, hence M is compact and the continuity of T implies hat every limit point of M is the fixed point for T.

Corollary 1. Let $\mu : A \to B$ be a left-continuous nonicreasing function such that $\mu(F) > F$ for every $F < H$. Let T be a mapping on the complete Menger space $(S, \mathcal{F}, \tau)$ with the left-continuous t-function such that

$$F_{T_p T_q} \geq \mu\,(F_{p,\,q}) \quad \forall\ p,\ q \in S.$$

Then for evory p_0 in X for which $\sup\limits_{x>0} \inf\limits_{x\geqq 1} F_p\ T_p\ (x)=1$ the sequence $\{p_n\}$ of iterates starting from p_0 convergs for the unique fixed point of T.

Proof. Let $A \subset S$ be a set such that $\alpha_A = H$ und $F \in K_A$. Then there exist a finite cover $(A_i)_{i=1}^{n}$ of A such that $D_{Ai} \geq F$. Evidently $B_i = T\,(A_i)$ i, is a cover of $T\,(A)$. Since for every p, q in A_i we have $F_{T_p T_q} \geq \mu\,(F_{p,\,q}) \geq \mu\,(P)$ it results that $D_{Bi} \geq \mu\ (F)$, hence $\mu\,(F) \in K_{T(A)}$. Thus $\mu\,(F) \leq \alpha_{T(A)}$ for every F in K_A. Since μ is left-continuous $\mu\,(\alpha_A) \leq \alpha_{T(A)}$ we have $\alpha_A < \mu(\alpha_A) \leq \alpha_{T(A)}$ hence T is densyfyin. Lot $G_n = Fp_n Tp_n$. Sinco $G_n \geq \varphi\ (G_{n-1}) > G_{n-1}$ the sequence $\{G_n\}$ is nondescreasing. Let $G_n \nearrow G$. From the left-continuity of μ is follows that $G \geq \mu\,(G)$, that is $G = H$. Thus the conditions of the Theorem are satisfied and the corollary is proved.

Corollary 2. [9] Let $(S, \mathcal{F}, \tau)$ be a complete Menger space with the left continuous t-function. Let M be a contraction mapping on S. If for some p_0 in S $\sup\limits_{x>0} Gp_0\,(x)=1$ then T has a unique fixed point.

Proof. Let $0<K<1$ be a such that $F_{T_p T_q}(x) \geq F_{pq}\left(\frac{p}{k}\right)$. The mappi $\mu_k : \Delta \to \Delta$ defined by $\mu_n\,(F) = K\ F$ satisfed the conditions of the corollary 1.

REFERENCES

1. G. Bocşan, On some fixed point theorems in probabilistic metric spaces, Mathematika Balcanika, 4 (1974).
2. G. Bocşan and G. Constantin, The Kuratowski function and some applications to the probabilistic metric spaces, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 55 (1973), Fasc. 3–4, 236–240.
3. J. Egbert, Products and quotients of probabilistic metric space Pacif. J. Math. (24 (1968), 437–455.
4. M. Furi and A. Vicnoli, Fixed points for denoyfying mappings, Atii. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 47 (1969), 463–467.
5. K. Menger, Statistical metrics, Proc. Nat. Acad. Sci, USA, 28 (1942), 535–537.
6. O. Onicescu, Nombres et systèmes aléatoires, Edition de l'Acad. R.P.R., Bucarest et Ed. Eyrolles, Paris, 1964.
7. B. Schweizer and SKLAR, Statistical metric spaces, Pacif. J. Math. 10 (1960) 313–334.
8. A. N. Serstnev, On the probabilistic generalization of metric spaces, Kazan. Gos. Univ. Ucen. Zop. 124, Kn. 2 (1964), 3–11 (in russion).
9. H. Sherwood, Complete probabilistic Spaces, Z1 Wahrsonelicheitetheorie Verw. Get. 20 (1971), 117–128.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 25 (39) **Fascicola 1—1980**

ASUPRA LATICEI CONGRUENŢELOR UNEI SUME DIRECTE DE ALGEBRE UNIVERSALE

DE
CARMENCITA UROSU

Fie $\mathcal{V}$ o varietate de algebre universale similare de tipul τ şi $\{Ui/i \in I\}$ o familie de algebre din $\mathcal{V}$. Relativ la operatorii P şi P , orice varietate de algebre universale este închisă. În [3] se defineşte o noţiune intermeidară între produsul direct şi produsul subdirect al unei familii arbitrare de algebre : produsul interdirect.

Definiţia I. Se numeşte produs interdirect al familiei de algebre $\{U_i/i \in I\} \leqslant \mathcal{V}$, o algebră $\mathcal{B} \in \mathcal{S}(\prod_{i \in I} U_i)$ astfel încît sînt îndeplinite condiţiile

(I) $\mathcal{B}$ este un produs subdirect

(2) dacă $a \in \prod_{i \in I} U_i$ şi $B \in \mathcal{B}$ astfel încît $\{i \in I \mid p_i(a) \neq p_i(b)\}$ este finită, atunci $a \in \mathcal{B}$.

Această noţiune coincide cu conceptul de produs direct în cazul în care I este o mulţime finită. Evident $\mathcal{B} \in \mathcal{V}$, orice varietate fiind închisă faţă de operatorul S.

Definiţia 2. O descompunere a unei algebre $U \in \mathcal{V}$ ca produs interdirect al algebrelor $\{U_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{V}$ este un monomorfism $\varphi : U \to \prod_{i \in I} U$ astfel că $\mathcal{V}(U)$ este un produs interdirect al algebrelor U_i, $i \in I$.

Astfel de descompuneri pot fi caracterizate foarte bine în termenii laticei $\mathcal{C}(U)$. Fie $<\varphi ; \prod_{i \in I} \mathcal{U}_i>$ o descompunere interdirectă a algebrei universale U şi notăm cu $\theta_i = ker\,(\prod_{j \neq i} \circ \varphi)$ şi $\theta^i = \bigcap_{j \neq i} \theta_j$. Atunci, conform propoziţiilor I.4 şi I.5 din [4], o condiţie necesară şi suficientă ca algebra U să admită o descompunere în produs interdirect al algebrelor factor $\{U/\theta_i,\ i \in I\}$ este ca să aibă loc următoarele condiţii :

(I) $\bigcap_{i \in I} \theta_i = \omega_U$

(2) $\theta^i \circ \theta_i = \tau_U$ pentru $\forall i \in I$.

Evident, dacă $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\} \leqslant \subseteq \mathcal{C}(U)$ astfel ca : $\bigcap_{i \in \overline{1,n}} \theta_i = \omega_U$ şi $(\bigcap_{J \neq i} \theta_y) \circ \theta_i = \tau_u$, $\forall_i \in \overline{1,\ n}$ atunci $U \cong \prod_{i \in \overline{1,n}} (U/\theta_i)$.

Observaţie. Dacă congruenţele pe o algebră comută, atunci cercetarea descompunerilor interdirecte ale algebrei U poate fi redusă la un studiu aritmetical al laticei $\mathcal{C}(U)$. În aceste condiţii, pentru orice $\delta, \gamma \in \mathcal{C}(U)$ avem $\delta, \gamma = \delta \vee \gamma$ şi prin urmare descompunerile interdirecte ale algebrei U sînt în corespondenţă bijectivă cu submulţimile $\{\theta_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{C}(U)$ care satisfac condiţiile :

$$\bigcap_{i \in I} \theta_i = \omega_U \text{ şi } (\bigwedge_{J \neq i} \theta_i) \vee \theta_i = \tau_U, \quad \forall_i \in I.$$

Deci descompunerile interdirecte ale algebrei U sînt complet determinate de structura de latice a mulţimii congruenţelor.

Definiţia 3. Congruenţa $\theta \in \mathcal{C}(U)$ se numeşte congruenţă de descompunere în produs interdirect al algebrei U dacă există $\theta' \in \mathcal{C}(U)$ astfel că $\{\theta, \theta'\}$ determină o descompunere în produs interdirect al algebrei U :

$$\mathcal{U} \cong \mathcal{U}/\theta \times_I \mathcal{U}/\theta'$$

Deci θ este o congruenţă de descompunere *d.* şi *n.d.* există θ' astfel ca :

$$\theta \cap \theta' = \omega_U \quad \text{şi} \quad \theta \circ \theta' = \tau_U.$$

Fie $\mathcal{C}_0(\mathcal{U})$ mulţimea tuturor congruenţelor de descompunere. Dacă congruenţele comută pe algebra U, atunci $\theta \in \mathcal{C}_0(\mathcal{U})$ d. şi n.d. θ are un complement în latica $\mathcal{C}(\mathcal{U})$. Dacă latica $\mathcal{C}_0(\mathcal{U})$ este distributivă rezultă că $\mathcal{C}_0(\mathcal{U}) \in \mathfrak{S}\mathcal{C}(\mathcal{U})$ şi $\mathcal{C}_0(\mathcal{U})$ este o algebră Boole.

Definiţia 4. O descompunere a algebrei $U \in \mathcal{V}$ ca sumă directă a familiei de algebre $\{{}_v U_i \in \mathcal{V} \; i \in I\}$ este un monomorfism $\varphi : U \to \prod_{i \in I} U_i$ astfel că au loc următoarele două condiţii :

(I) $<\mathcal{C} ; \bigcup_{i \in I}{}_i>$ este un produs interdirect de descompunere al algebrei U şi

(2) dacă $x, y \in U$, atunci $\{i \in 1 \mid (\prod_i \circ \varphi)(x) \neq (\prod_i \circ \varphi)(y)\}$ este finită.

Deci suma directă este un produs interdirect minimal în laticea $\mathfrak{S}(\prod_{i \in I} U_i)$. Astfel, de exemplu, dacă $\{U_i \mid i \in I\}$ sînt grupuri abeliene, $\sum U_i$ este o subalgebră a produsului direct $\prod_{i \in I} U_i$ determinat de $B = \{a \in \prod_{i \in I} U_i / a(i) = 0$, exceptînd un număr finit de componente $\}$. Deci orice produs interdirect al grupurilor U_i, $i \in t$, conţine $\sum_{i \in I} U_i$ ca o subalgebră.

În lucrarea [3] sînt studiate condiţiile în care o varietate de algebre similare are proprietatea că pentru fiecare $U_1, U_2 \in \mathcal{V}$ congruenţele pe $U_1 \times U_2$ sînt produse de congruenţe : $\theta_1 \times \theta_2 > 0_1 \in \mathcal{C}(\mathcal{U}_1)$, $\theta_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{U}_2)$

$$\theta_1 \times \theta_2 = \{((a_i, b_1), (a_2, b_2)) \in (\mathcal{U}_1) \times (\mathcal{U}_2) \mid a_1 0_1 a_2 \text{ şi } b_1 \theta_2 a_2\}$$

Evident că dacă orice congruenţă $\theta \in \mathcal{C}(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2)$ este decompozabilă, atunci corespondenţa $(\theta_1, \theta_2) \to \theta_1 \times \theta_2$. Este un izomorfism între laticele $\mathcal{C}(\mathcal{U}_1) \times \mathcal{C}(\mathcal{U}_2)$ şi $\mathcal{C}(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2)$.

Conform teoremei 2 [3], congruenţa $\theta \in \mathcal{C}(\mathcal{U}_1) \times \mathcal{C}(\mathcal{U}_2)$ este un produs al congruenţelor θ_1 şi θ_2, $\theta_1 \in \mathcal{C}(\mathcal{U}_1)$, $\theta_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{U}_2)$ d. şi n.d. are loc condiţia :

$$(\pi_1 \vee \theta) \wedge (\pi_2 \vee \theta) = \theta \text{ unde } \pi_i = \ker(p_i), \; i = 1, 2.$$

H. Werner în lucrarea [5] denumeşte congruenţe oblice acele congruenţe $\theta \in \mathcal{C}(\mathcal{U}_1) \times (\mathcal{U}_2)$ pentru care $(\pi_1 \vee \theta) \wedge (\pi_2 \vee \theta) \neq \theta$.

Fie $\{\theta_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{U})$ o familie de congruențe care determină descompunerea algebrei $U \in \mathcal{V}$ într-un produs interdirect al algebrelor factor $U/\theta_i : U \cong <\varphi ; \prod_{i \in I} \mathcal{U}/\theta_i>$. Presupunem că $\theta_i \neq \tau_U$, $\forall i \in I$.

Teorema I. Dacă algebra U este izomorfă cu $<\varphi ; \prod_{i \in I} \mathcal{U}/\theta_i>$, $\theta_i \neq \tau_u$ $i \in I$ atunci următoarele condiții sînt echivalente :

(I) $<\varphi ; \prod_{i \in I} \mathcal{U}/\theta_i>$ este o descompunere a algebrei U în sumă directă

(2) $U \{\bigcap_{i \in I-F} \theta_i \mid \mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(I)\} = \tau_U$.

Demonstrație. Dacă are loc condiția (I) rezultă că θ_i sînt congruențe de descompunere în produs interdirect al algebrei U și deci verifică condițiile (2) definiției 4. Vom arăta că pentru orice $(x, y) \in \tau_u$ rezultă că elementul $(x, y) \in \in U \{\bigcap_{i \in I-F} \theta_i \mid F \in \mathcal{P}_f(I)\}$.

$(x, y) \in U \{\bigcap \theta_i,\ i \in I - F / F \in \mathcal{P}_f(I)\}$ d. și n.d. există șirul finit de elemente din algebra U : $x = x_0, \ldots, x_m = y$ și există $\mathcal{F}_j \in \mathcal{P}_f(I)$ astfel încît avem $x_y = x_{y+1}$ $(\bigcap \theta_i)$, pentru orice $y = \overline{0, m-1}$. Fie $\mathcal{F}_j = \{i \mid x_y(i) \neq x_{y+1}(i)\}$ și deci $\forall y = \overline{0, m-1}$ rezultă că mulțimea de indici $\mathcal{F}_j$ are proprietatea : $x_y \equiv \equiv x_{y+1}$ $(\bigcap_{i \in I-F_y} \theta_i)$. Deci are loc relația : $\tau_u \subseteq U \{\bigcap_{i \in I=F} \theta_i \mid F \in \mathcal{P}_f(I)$ ceea ce implică condiția (2).

Reciproc, dacă are loc relația (2) și θ_i sînt congruențe de descompunere ale algebrei U într-un produs interdirect, trebuie să verificăm condiția (2) din definiția sumei directe. Are loc, conform ipotezei, relația :

$$\forall (x, y) \in \tau_U,\ (x, y) \in U \{\bigcap_{i \in I} \theta_i \mid F \in \mathcal{P}_f(I)$$

și deci există șirul finit $x = x_0, \ldots, x_n = y$, $x_y \in U$, $j = \overline{0, n}$ și $\mathcal{F}_j \in \mathcal{P}_f(I)$ astfel ca pentru orice $j = \overline{0, n-1}$ să aibă loc relația :

$$x_y \equiv x_{y+1} (\bigcap_{i \in I-F} \theta_i)$$

Aceasta înseamnă că x_y diferă de x_{y+1} printr-un număr finit de componente pentru orice $j = \overline{0, n-1}$. Deci $\{i \in I \mid x(i) \neq y(i)\}$ este finită, ceea ce înseamnă că algebra U este suma directă a algebrelor U/θ_i, $i \in I$.

Se știe că pentru orice algebră $U = <A, F> \in \mathcal{V}$, laticea $\mathcal{C}(U)$ este o latice compact generată adică este completă și fiecare element al ei este supremumul unei mulțimi de elemente compacte ale laticei ([1]).

Teorema 2. Dacă laticea $\mathcal{C}(U)$ este modulară, atunci următoarele două condiții sînt echivalente :

(I) $\mathcal{C}(U)$ conține o mulțime $\{\theta_i \mid i \in I\}$ de atomi astfel încît au loc relațiile :

(a) $\theta_i \wedge (\bigvee_{y \neq i} \theta_y) = \omega_U$, $\forall_i \in I$ și

(b) $\bigvee_{i \in I} \theta_i = \tau_U$

(2) $\mathcal{C}(U)$ este complementată.

Demonstrație. (I) $\Rightarrow$ (2). Se știe că congruențele θ_i sînt atomi în $\mathcal{C}(U)$ d. și n.d. este satisfăcută condiția : $\theta_i \mid \omega_U = \{\theta_i, \omega_U\}$, $\forall i \in I$. Pentru o submulțime $S \supset I$ vom defini congruența $\theta_S = \bigvee_{i \in S} \theta_i \in C(U)$ și notăm cu θ congruența $\theta'(I - \{i\}) = \bigvee_{J \neq i} \theta_y$. Au loc următoarele relații :

$\theta'(I) = \tau(U)$ conform (b) și $\theta_i \wedge \theta_i' = \omega_U$ conform (a) și deoarece θ_i sînt atomi, sînt verificate condițiile :

$$\theta_i \neq \omega_U \text{ și } \theta_i' \neq \tau_U, \quad \forall\, i \in I.$$

Deci $\theta'(I - S)$ este un complement al congruenței $\theta'(S)$ în $\mathcal{C}(U)$:

$$\theta'(I - S) \vee \theta'(S) = \tau_U$$

și

$$\theta'(I - S) \wedge \theta'(S) = \omega_U, \quad \forall\, S \in P(I).$$

Conform condiției (b) are loc relația :

$$\left(\bigvee_{i \in I - S} \theta_i\right) \vee \left(\bigvee_{i \in S} \theta_i\right) = \tau_U.$$

Se verifică relația

$$\left(\bigvee_{i \in I - S} \theta_i\right) \wedge \left(\bigvee_{i \in S} \theta_i\right) = \omega_U : \forall\, (a, b) \in \bigvee_{i \in I - S} \theta_i \text{ și } (a, b) \in \bigvee_{i \in S} \theta_i$$

rezultă că există șirul finit $a = x_0, \ldots, x_n = b$, $x_n \in U$ astfel că $\exists\, i_y \in I$ și $i_y \notin S$, $x_y \equiv x_{y+1}\ (\theta_{iy})$ $\forall\, y = \overline{0, n-1}$ și există șirul finit $a = y_0, \ldots, y_m = b$, $y_m \in U$ astfel că avem $i_p \in S$ și $y_p \equiv y_{p-1}\ (\theta_{ip})$, $\forall\, p = \overline{0, m-1}$ ceea ce implică conform condiției (a) că $a = b$. Deci $\left(\bigvee_{i \in I - S} \theta_i\right) \wedge \left(\bigvee_{i \in S} \theta_i\right) \subset \omega_U$.

(2) $\Rightarrow$ (I)

Presupunem că laticea $\mathcal{C}(U)$ este complementată. Orice element al unei latici compact generate, complementată și modulară este o reuniune de atomi. Deci există mulțimea de atomi $\{\theta_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{C}(U)$ astfel ca $\tau_U = \bigvee_{i \in I} \theta_i$ ceea ce este echivalent cu condiția (b). Dacă θ_i este un atom în $\mathcal{C}(U)$ și $\theta_i \vee \left(\bigvee_{J \neq i} \theta_y\right) \neq \neq UU$, atunci am avea $\theta_i \leqslant \bigvee \theta_y$ ceea ce contrazice condiția (b) și deci are loc (a).

Teorema 3. Pentru o sumă directă U a familiei de algebre U_i, $i \in I$, astfel că laticea $\mathcal{C}(U)$ este modulară și $U_i \times U_j$ nu are congruențe oblice pentru $i \neq j$ rezultă izomorfismul : $\mathcal{C}(U) \cong \prod_{i \in I} \mathcal{C}(U_i)$.

Demonstrație. Laticea $\mathcal{C}(U)$ este algebrică și modulară. Notînd cu $\pi_i = \ker(p_i)$ sînt satisfăcute următoarele condiții, π_i fiind congruențe de descompunere în sumă directă :

(I) $\bigwedge_{i \in I} \pi_i = \Delta_A$

(2) $\theta = (\theta \vee \pi_i) \wedge (\theta \vee \pi_y)$, $\forall\, \theta \in \mathcal{C}(U_i \times U_y)$, $i, y \in I$, $i \neq y$

(3) $\pi_i \vee \left(\bigwedge_{J \neq i} \pi_y\right) = \tau_U$.

Rezultă că toate intersecțiile posibile ale mulțimii de congruențe $\{\pi_i\}_{i \in J}$ formează o sublatice completă Boole a laticei $\mathcal{C}(U)$.

Pentru fiecare $i \in I$ vom nota $\prod_i' = \bigwedge_{j \neq i} (\prod_j)$. Atunci pentru orice $\theta \in \mathcal{C}(U)$ avem, conform relației de subdistributivitate:

$$\theta \leqslant (\theta \vee \pi_i) \wedge (\theta \vee \bigwedge_{j \neq i} \pi_j) \leqslant \bigwedge_{i \in I} (\theta \vee \pi_i) = \theta$$

Deci are loc relația

$$\theta = (\theta \vee \pi_i) \wedge (\theta \vee (\bigwedge_{j \neq i} \pi_j)) \tag{4}$$

Dacă $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{C}(U)$ avem:

$$\begin{aligned}(\theta_1 \wedge \theta_2) \vee \pi_i &= [(\theta_1 \vee \pi_i) \wedge (\theta_1 \vee \pi_j) \wedge (\theta_2 \vee \pi_i) \wedge (\theta_2 \vee \pi_j)] \vee \pi_i = \\ &= (\theta_1 \vee \pi_i) \wedge (\theta_2 \vee \pi_i) \wedge [(\theta_1 \vee \pi_j) \wedge (\theta_2 \vee \pi_j)) \vee \pi_i] = \\ &= (\theta_1 \vee \pi_i) \wedge (\theta_2 \vee \pi_i). \end{aligned} \tag{5}$$

Pentru fiecare π_i, $i \in I$, definim funcția $\varphi\pi_i : \mathcal{C}(U) \to [\pi_i, \tau_U]$ prin relația $\varphi\pi_i(\theta) = \theta \vee \pi_i$. Conform relației (5) rezultă că $\varphi\pi_i$ este un omomorfism de latici și dacă $\theta_1, \theta_2, \in L$ și $\theta_1 \neq \theta_2$ atunci pentru fiecare π_i, $i \in I$, avem $\varphi\pi_i(\theta_1) \neq \varphi\pi_i(\theta_2)$. Deci φ este un monomorfism. Pentru a arăta că φ este un epimorfism, fie: $f \in \prod_{i \in I} [\pi_i, \tau_3]$. Atunci, conform modularității și relației (3), pentru π_i, $i \in I$ avem:

$$\varphi\pi_i(\bigwedge_{i \in I} f(\pi_i)) = (\bigwedge_{i \in I} f(\pi_i)) \vee \pi_i = (\pi_i \vee f(\pi_j)) \wedge \bigwedge_{J \neq i} f(\pi_i) = f(\pi_i).$$

Deci are loc izomorfismul: $\mathcal{C}(U) \cong \prod_{i \in I} \mathcal{C}(U_i)$.

BIBLIOGRAFIE

1. Birkhoff, G.: Lattice Theory, AMS Colloq, 3 ed. Providence, 1967.
2. Dilworth R. P., The structure of relatively complemented lattices, Ann. of Math. 51 (1950), 348–359.
3. Fraser A. Grant and Alfred Horn: Congruences relation in direct products, Proceedings of the American Math. Soc. 26/1970.
4. Pierces S. Richard: Introduction to the Theory of Abstract Algebras, University of Washington, 1968.
5. Werner H.: Congruences on products of algebras and functionaily complete algebras Algebra Universalis, Vol. 4/I, 1974.

SUR LA LATICE DES CONGRUENCES DE SOMME DIRECTE DES ALGÈBRES UNIVERSALLES

RÉSUMÉ

Dans le présent travail sont étudies quelquèes proprietés de la latice des congruences sur une somme directe des algèbres universelles, dans le cas quand $\mathcal{C}(U)$ est modulare. Sont donnés des conditions equivalentes pour l'existence d'un decompositions dans la somme directe d'une algèbre $U \in \mathcal{U}$.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 1—1980**

ECHIVALENŢA ŞI SINGULARITATEA MĂSURILOR DE PROBABILITATE GAUSSIENE ÎN SUBSPAŢII ALE SPAŢIULUI MĂSURILOR REALE ŞI MĂRGINITE

DE

OCTAVIAN LIPOVAN

1°. Problema echivalenţei şi singularităţii unei măsuri gaussiene prin raport cu alta în spaţii de funcţii a fost studiată de o serie de autori care au stabilit condiţii necesare şi suficiente pentru fiecare în parte. În cazul spaţiilor Hilbert separabile pentru măsurile gaussiene şi translaţiile lor, astfel de condiţii necesare şi suficiente au fost date cu ajutorul operatorului comun de covarianţă al celor două măsuri gaussiene.

În prezenta lucrare se stabilesc rezultate analoage pentru cazul spaţiilor $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$, $j=0,2$, plecînd de la un rezultat obţinut în [1] de Rajput B.

Astfel se demonstrează că dacă τ_0 şi τ_m sînt două măsuri gaussiene din spaţiul $\mathfrak{M}_j$ $(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$, $j=0, 2$, cu măsura medie c şi m, avînd acelaşi operator de covarianţă S, atunci ele sînt sau singulare sau echivalente.

De asemenea se dă o expresie pentru derivata Radon-Nikodym a lui τ_m prin raport cu τ_0, cu ajutorul lui S şi m.

2°. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $p \in N$, mărginită şi închisă. În [4] au fost introduse subspaţiile $\mathfrak{M}_0(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$ şi $\mathfrak{M}_2(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$ ale spaţiului Banach $\mathfrak{M}(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$ al tuturor măsurilor reale şi mărginite definite pe $\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega$.

Fie $\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j}$, $j=0, 2$, σ-algebra mulţimilor boreliene din spaţiul Banach $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$ iar $\mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$, dualul său topologic. Dacă τ este o măsură de probabilitate definită în $(\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega), \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j})$, $j=0, 2$ astfel că :

$$\int_{\mathfrak{M}_j} \| \lambda \|^2 \, d\tau(\lambda) < \infty, \quad \lambda \in \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega).$$

atunci se ştie [5] că operatorul de covarianţă :

$$S : \mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega) \to \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega), \quad j=0, 2$$

al măsurii τ este :

$$S(\mathfrak{F}) = (B) \int_{\mathfrak{M}_j} (\mu - \mu_0) \mathfrak{F}(\mu - \mu_0) \, d\tau(\mu), \quad \mathfrak{F} \in \mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega).$$

unde $\mu_0 \in \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$, $j=0, 2$ este măsura medie pentru τ :

$$\mu_0 = (B) \int_{\mathfrak{M}_j} \lambda \, b \, \tau(\lambda).$$

3°. Vom identifica în continuare spațiul $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$, $j = 0, 2$ cu spațiul liniar al funcțiilor cu valori reale definite pe dualul său topologic $\mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$, prin considerarea fiecărei măsuri $\lambda \in \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$ ca o funcțională liniară și continuă pe $\mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$ definită prin :

$$\lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(\lambda)$$

pentru orice $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$. Vom presupune de asemenea că măsura de probabilitate gaussiană τ are măsura medie zero.

Fie $\pi_{\mathcal{F}} : \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega) \to \mathbb{R}$ aplicația : $\pi_{\mathcal{F}}(\lambda) = \lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(\lambda)$ pentru orice $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$ iar $\lambda \in \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$.

Definiția 1. Se numește nucleu de covarianță al măsurii τ, aplicația $K : \mathfrak{M}^*_j \times \mathfrak{M}^*_j \to \mathbb{R}$ definită prin :

$$K(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \int_{\mathfrak{M}_j} \pi_{\mathcal{F}}(\lambda) \cdot \pi_{\mathcal{G}}(\lambda)\, d\tau(\lambda) \; ; \; \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega).$$

Definiția 2. Se numește spațiu Hilbert de reproducere al nucleului K și se notează $H(K)$, unicul spațiu Hilbert al funcțiilor reale pe $\mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$, $j = 0, 2$, astfel că :

(i) $K(\cdot, \mathcal{F}) \in H(K)$

(ii) Pentru orice $f \in H(K)$ avem :

$$f(\mathcal{F}) = \langle \mathcal{F}(\cdot), K(\cdot, \mathcal{F}) \rangle_{H(K)}, \; \mathcal{F} \in \mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega).$$

În particular : $K(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \langle K(\cdot, \mathcal{F}), K(\cdot, \mathcal{G}) \rangle_{H(K)}$.

Fie $\nabla = \{\pi_{\mathcal{F}} ; \mathcal{F} \in \mathfrak{M}^*_j\} / \bigcirc$ unde $\bigcirc$ este mulțimea : $\bigcirc = \{\pi_{\mathcal{F}} ; \pi_{\mathcal{F}} = 0, \; a \cdot p \cdot \tau\}$. Este clar că $\nabla \subset L^2(\mathfrak{M}_j, \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j}, \tau)$.

Fie $\overline{Sp(\nabla)}$, închiderea liniară a lui ∇ în $L^2(\mathfrak{M}_j, \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j}, \tau)$. Se știe [6] că $\overline{Sp(\nabla)}$ este izometric izomorf cu $H(K)$ prin izomorfismul natural $\mathcal{T} : \overline{Sp(\nabla)} \to H(K)$, care este extensia unică a corespondenței : $(\pi_{\mathcal{F}} + \bigcirc) \leftrightarrow K(\cdot, \mathcal{F})$, $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$.

Remarca 1. Izomorfismul natural $\mathcal{T}$ este extensia liniară a operatorului de covarianță S, dacă facem identificarea menționată anterior.

Într-adevăr, se observă că $\bigcirc = S^{-1}\{0\}$. De aceea operatorul liniar $S' : \nabla \mapsto \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$ definit prin :

$$S'(\pi_{\mathcal{F}}) = S\mathcal{F}), \; \mathcal{F} \in \mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$$

este corect definit și este o aplicație 1 — 1 a lui ∇ în $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$. Fie $f \in \nabla$. Atunci există $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\dots f_p} \cap \Omega)$ astfel ca $f = \pi_{\mathcal{F}} + S^{-1}\{0\}$. Fie $\hat{f}$ elementul din $H(K)$ care este imaginea lui f prin izomorfismul natural $\mathcal{T}$.

Atunci din proprietatea de autoreproducere avem pentru orice $\mathcal{G} \in \mathfrak{M}_j^*(\Omega, \mathcal{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)$:

$$\widehat{f}(\mathcal{G}) = \langle \widehat{f},\ K(\cdot,\ \mathcal{G})\rangle_{H(K)} = \langle f,\ (\pi_{\mathcal{G}} \dot{+} S^{-1}\{0\})\rangle_{L^2(\mathfrak{M}_j,\ \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j},\ \tau)} =$$

$$= \langle \pi_{\mathcal{F}} \dot{+} S^{-1}\{0\},\ \pi_{\mathcal{G}} \dot{+} S^{-1}\{0\}\rangle_{L^2(\mathfrak{M}_j,\ \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j},\ \tau)} = \int_{\mathfrak{M}_j} \mathcal{F}(\lambda)\,\mathcal{G}(\lambda)\,d\tau(\lambda) = (S(\mathcal{F}))_{(\mathcal{G})} =$$

$$= [S(f)](\mathcal{G}).$$

Deci $\widehat{f} = S'(f)$. Din $\pi_{\mathcal{F}} \dot{+} 0 \leftrightarrow K(\cdot, \mathcal{F})$, rezultă că are o extensie unică pe $\overline{S'}$ a lui ∇ în $H(K)$, extensie care este chiar izomorfismul natural. Deoarece $H(K) \subset \mathfrak{M}_f(\Omega, \mathcal{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)$ se observă că $S'(f)$ pentru $f \in \nabla$, este în același timp element al lui $H(K)$ și a lui $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)$.

Fie T, o mulțime arbitrară iar Y un spațiu liniar al funcțiilor cu valori reale definite pe T.

Definiția 3. Se numește mulțime cilindrică a lui Y, o mulțime de forma $\{x \in Y\ ;\ (x(t_1),\ (x(t_2),\ \ldots,\ x(t_p)) \in B\}$ unde $p \in N$; $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_p \in T$ iar B^p este o mulțime borelianăă din spațiul euclidian p — dimensional $\mathbb{R}^p$.

Este cunoscut următorul rezultat obținut de Cambanis S. și Rajput B. în [1].

Remarca 2. Fie $\mathfrak{B}(Y)$, σ — cîmpul generat de mulțimile cilindrice din Y. Să presupunem că P_0 este o măsură gaussiană pe $(Y, \mathfrak{B}(Y))$ care are elementul mediu funcția zero și a cărui nucleu de covarianță este K. Fie $h_m(x) = x + m$ translația liniară prin m în Y. Fie $(P_m = P_0 \circ h_m^{-1}$, atunci P_m și P_0 sînt ambele reciproc singulare sau echivalente.

De asemenea :

(i) $P_m \equiv P_0$ dacă și numai dacă $m \in H(K)$, unde $H(K)$ este spațiul Hilbert de reproducere al nucleului K.

(ii) Dacă $m \in H(K)$ vom avea :

$$\frac{dP_m}{dP_0}(x) = \exp\left[\eta(x) - \frac{1}{2}\| m \|^2_{H(K)}\right] \text{a.p.} P_0.$$

unde $m(t) = \int_Y x(t)\,\eta(x)\,dP_0(x)$, adică $m = T(\eta)$, iar T este izomorfismul natural între închiderea liniară a lui $\{x_t\ ;\ t \in T\}$ considerată ca subspațiu a lui $L^2(Y, \mathfrak{B}(Y), P_0)$ și $H(K)$.

Prin identificarea spațiului $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)$, $j = 0, 2$ cu spațiul liniar al funcțiilor cu valori reale definite pe dualul său topologic $\mathfrak{M}_j^*(\Omega, \mathcal{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)$ și aplicînd rezultatul precedent rezultă :

Teoremă. Fie τ_0, o măsură gaussiană în $(\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega.,\ \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j})$, $j = 0, 2$, a cărui măsură medie este zero și a cărui operator de covarianță este S. Fie aplicația $f_\omega : \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega) \to \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)$ definită prin $f_\omega(\lambda) = \lambda + \omega$ unde $\omega \in \mathfrak{M}_j(\Omega, \mathcal{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)$, fixată.

Fie $\tau_\omega = \tau_0 f_\omega$. Atunci τ_ω și α_0 sînt ambele sau singulare sau echivalente. De asemenea :

(i) $\tau_\omega \equiv \tau_0$ dacă și numai dacă $\omega \in \overline{S'(\overline{Sp(\nabla)})}$.

(ii) Dacă $\omega \in \overline{S'(\overline{Sp(\nabla)})}$ vom avea :

$$\frac{d\tau_\omega}{d\tau_0}(\lambda) = \exp\left[f(\lambda) - \frac{1}{2}\widehat{f}(\overline{S'}(\widehat{f}))\right] a.p.\ \tau_0.$$

unde

$$\overline{S'}(\widehat{f}) = \omega,\ f \in \widehat{f} \text{ iar } f \in \overline{Sp(\nabla)}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Cambanis S., and Rajput B. S., „Some zero-one laws for Gaussian processes". Institute of State Mineo-Series No. 783, Dept. of State, Univ. of North Carolina Chapel Hill, 1971.
2. Jain N. C and Kallianpur G., „Norm convergent expansion for Gaussian processes in Banach spaces". Proc. Amer. Math. Soc. 25/1970/890–895.
3. Le Page R. D., „Note relating Bochner integrals and reproducing Kernels to series expansion on a Gaussian Banach Spaces". Proc. Amer. Math. Soc. 32/1972/285–288.
4. O. Lipovan, „Asupra măsurilor de probabilitate din subspații ale spațiului Banach al măsurilor reale și mărginite". Buletinul științific și tehnic al Institutului Politehnic Timișoara – Seria matematică-fizică. Fasc. 1–1978 Tom 24/38.
5. O. Lipovan, „Operatorul de covarianță al măsurilor de probabilitate definite pe spațiul Banach al măsurilor reale și mărginite". Buletinul științific și tehnic al Institutului Politehnic Timișoara. Seria matematică-fizică-mecanică teoretică și aplicată. Fasc. 2–1977. Tom 22/36
6. Parzen E., „An approach to time series analysis". Ann. Math. Statist. 32 (1961) 951–989.

EQUIVALENCE AND SINGULARITY OF A GAUSSIAN MEASURE ON $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega)$, $f=0, 2$, SPACES

ABSTRACT

The problem of equivalence and singularity of one Gaussian measure with respect to another in function spaces has been studied by several authors who also provided necessary and sufficient conditions for either of the two alternatives. In the special case of a Gaussian measure and its linear translate defined on a separable Hilbert space, such necessary and sufficient conditions are expressed in terms of the common covariance operator of the two Gaussian measures.

In this paper we extend such result to the case of $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega)$ $f=0, 2$, spaces. Namely, we prove that of τ_0 and τ_m are two Gaussian measures, defined on $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega)$ space, with means zero and m respectively but the same covariance operator S, then they are either equivalent or singular.

A necessary and sufficient condition for equivalence and, in which case, an expression for the Radon-Nikodym derivative of τ_m with respect to τ_0 are all obtained in terms of S and m.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) Fascicola 1—1980

CÎTEVA OBSERVAŢII ASUPRA MĂSURILOR DE PROBABILITATE DEFINITE PE STRUCTURI GENERATE DE MĂSURA LEBESGUE-STIELTJES DIN $\mathbb{R}^p$, $p \in N$.

DE

O. LIPOVAN

0°. Utilizînd spaţiile $\mathfrak{M}_j$ $(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega)$, $j=0,2$ 1, 2 introduse în [5] cu ajutorul măsurii Lebesgue-Stieltjes din $\mathbb{R}^p$, $p \in N$, prezenta lucrare stabileşte o serie de conexiuni între măsurile de probabilitate definite pe $\mathfrak{M}_j$ $(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \cap \Omega)$, $j=0, 2$, şi natura intimă a elementelor lui $\mathfrak{M}_j$ $(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega)$.

Aceste conexiuni sînt exprimate în termeni ai operatorului de covarianţă S şi ai inelului topologic de mulţimi $(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)$ generat de o măsură λ_0 în care egalitatea este interpretată modulo λ_0 ($E=F$ $[\lambda_0]$ dacă şi numai dacă $\lambda_0(E \Delta F)=0$).

1°. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $p \in N$, mărginită şi închisă. Fie de asemenea spaţiul cu măsură $(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega, \mu_{f_1 \ldots f_p})$ unde $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(i=1, 2, \ldots p)$ sînt monoton crescătoare şi continue la stînga în orice punct din $\mathbb{R}$, $\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega$ este σ—algebra mulţimilor măsurabile Lebesgue-Stieltjes din Ω generată de f_i, $(i= =1, 2, \ldots, p)$ iar $\mu_{f_1 \ldots f_p} : \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega \to \mathbb{R}_+$ măsura Lebesgue-Stieltjes din Ω.

Clasa :

$$\mathfrak{A}_p = \{D \subseteq \mathbb{R}^p ;\ D=[a, b_1) \times [[a_2, b_2) x \cdots x [a_p, b_p) ;\ a_i, b_i \text{ numere raţionale}\}$$

este o mulţime numărabilă de generatori pentru σ — inelul mulţimilor boreliene din $\mathbb{R}^p$, $p \in N$.

Fie $\lambda_0 : \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega \to [0, 1]$. Vom spune că două mulţimi E şi F din $\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega$ sînt egale modulo λ_0, şi vom nota $E=F$ $[\lambda_0]$ dacă şi numai dacă $\lambda_0(E \Delta F)=0$.

Vom nota cu $(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)$ algebra cu măsură asociată lui λ_0 din Ω. Se ştie ([3] pag. 167) că $(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)$ este un spaţiu metric complet separabil, unde clasa $\mathcal{C}(\mathfrak{A}_p \cap \Omega)$ a reuniunilor finite de mulţimi din $\mathfrak{A}_p \cap \Omega$ este densă pe $(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)$ iar metrica este dată de :

$$d(E, F)=\lambda_0(E \Delta F),\ E, F \in \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1 \ldots f_p} \cap \Omega$$

Din ([6], Th. 6.2.p.43) se cunoaşte că spaţiul $\mathcal{M}[(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)(\lambda_0)$ al tuturor măsurilor de probabilitate definite pe $\mathfrak{B}_{\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega}$/unde $\mathfrak{B}_{\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega}$ este σ – algebra mulţimilor boreliene din $(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)(\lambda_0)$ poate fi metrizat ca spaţiu metric separabil unde mulţimea tuturor măsurilor ale căror suporturi sînt subclase finite ale lui $\mathcal{C}(\mathfrak{L}_p\cap\Omega)$ este densă pe $\mathcal{M}[(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)(\lambda_0)]$, ([6] Th. 6.3. p. 44).

În [5] au fost introduse subspaţiile Banach separabile $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)$, $j=0, 1, 2$ ale spaţiului Banach $\mathfrak{M}(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)$ al tuturor măsurilor rele a şi mărginite definite pe $\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega$.

Fie $\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j}$, $j=0, 2$, σ – alegebra mulţimilor boreliene din spaţiul Banach $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)$ iar $\mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)$, $j=0, 2$ dualul său topologic. Dacă $\tau\in\mathcal{M}[\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)]$, este o măsură de probabilitate definită în $(\mathfrak{M}_f(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega), \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}_j})$, $j=0, 2$ astfel că

$$\int_{\mathfrak{M}_j}\|x\|^2\,d\tau(\lambda)<\infty,\quad \lambda\in\mathfrak{M}_j\ (\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)$$

atunci se ştie [4] că operatorul de covarianţă

$$S:\mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)\mapsto\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega),\quad j=0,2$$

al măsurii τ este :

$$S(\mathfrak{F})=(B)\int_{\mathfrak{M}_j}(\mu-\mu_0)\,\mathfrak{F}(\mu-\mu_0)\,d\tau(\mu),\quad \mathfrak{F}\in\mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)$$

unde $\mu_0\in\mathfrak{M}_f(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)$, $j=0, 2$ este măsura medie pentru τ :

$$\mu_0=(B)\int_{\mathfrak{M}_j}\lambda\,d\tau(\lambda)$$

2°. În continuare prin intermediul unei măsuri $\tau\in\mathcal{M}[\mathfrak{M}_f(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)]$, $j=0, 2$, măsurile de probabilitate din $\mathfrak{U}[(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)(\lambda_0)]$ vor fi aproximate de măsuri de probabilitate cu suport finit, care la rîndul lor sînt puse în corespondenţă cu funcţii reale etajate din spaţiul euclidian $\Omega\subseteq\mathbb{R}^p$, $p\in N$.

Teorema 1. Fie S operatorul de covarianţă al unei măsuri de probabilitate $\tau\in\mathfrak{U}[\mathfrak{M}_f(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)]$, $j=0,2$.

Pentru orice mulţime mărginită $H\subseteq\mathfrak{M}^*_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)$, $j=0, 2$ există o măsură de probabilitate, $\lambda_0:\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega\mapsto[0, 1]$ cu proprietatea că pentru orice $\rho\in\mathcal{M}[(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)(\lambda_0)]$ există un şir $\{h_n\}_{n\in N}$, $h_n:\Omega\mapsto\mathbb{R}$, $\mathfrak{L}_p\cap\Omega$ – etajate, astfel că :

$$\int_{(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p}\cap\Omega)(\lambda_0)}S(\mathfrak{F})\,d\rho=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{dS(\mathfrak{F})}{d\lambda_0}\cdot h_n d\lambda_0,\qquad \mathfrak{F}\in H$$

unde $\frac{dS(\mathfrak{F})}{d\lambda_0}$ este derivata Radon-Nikodym a măsurii $S(\mathfrak{F})$ prin raport cu λ_0

Demonstrație. Se știe din ([5] p. 39) că în ipotezele teoremei, mulțimii mărginite $H \subseteq \mathfrak{M}_j^*(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)$ îi corespunde o măsură de probabilitate $\lambda_0 : \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega \mapsto [0, 1]$, astfel că $S(\mathfrak{F}) \ll \lambda_0$ pentru orice $\mathfrak{F} \in \mathfrak{M}_j^*(\cap \Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap$ Din absolut continuitatea măsurii $S(\mathfrak{F})$ prin raport cu λ_0, rezultă că $S(\mathfrak{F})$ este o funcție corect definită și uniform continuă pe spațiul $(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)$.

Pentru orice $E \in \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)$, $\mathfrak{F} \in \mathfrak{M}_j^*(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)$ avem $S(\mathfrak{F})(E) = \int_\Omega \frac{dS(\mathfrak{F})}{d\lambda_0} d\lambda_0$. Din ([6] Th. 6.3. p. 44) pentru măsura $\rho \in \mathcal{M}[(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)]$ există un șir $\{\rho_n\} \subseteq \mathcal{M}[\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)]$

$$\rho_n = \sum_{k \in I_n} a_k^{(n)} \delta_{E_k^{(n)}}, \quad E_k^{(n)} \in \mathcal{C}(P_p \cap \Omega), \quad a_k^{(n)} < \frac{1}{n}, \quad \rho_n \Rightarrow \rho$$

unde prin „$\Rightarrow$" am notat convergența slabă din $\mathcal{M}[(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)]$.

Vom avea atunci pentru orice $\mathfrak{F} \in \mathfrak{M}_j^*(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)$:

$$\int_{(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)} S(\mathfrak{F})\, d\rho = \lim_{n\to\infty} \int_{(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)} S(\mathfrak{F})\, d\rho_n.$$

Să notăm cu : $h_n = \sum_{k \in I_n} a_k^{(n)} \chi_{E_k^{(n)}}$ unde $\chi_{E_k^{(n)}} : \Omega \mapsto \mathbb{R}'$ este funcția caracteristică a mulțimii $E_k^{(n)}$. Deoarece orice $E_k^{(n)} \in \mathcal{C}(\mathfrak{L}_p \cap \Omega)$ are forma $E_k^{(n)} = \bigcup_{i \in I_k^{(n)}} F_{ik}^{(n)}$, $F_{ik}^{(n)} \in \mathfrak{L}_p \cap \Omega$; $I_k^{(n)}$ finite, $F_{ik}^{(n)} \cap F_{jk}^{(n)} = \Phi$, $i \neq j$, putem presupune că h_n sînt $\mathfrak{L}_p \cap \Omega$ – etajate [2].

Vom avea pentru orice $\mathfrak{F} \in \mathfrak{M}_j^*(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)$:

$$\int_{(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)} S(\mathfrak{F})\, d\rho = \lim_{n\to\infty} \int_{(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)} S(\mathfrak{F})\, d\rho_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k \in I_n} a_k^{(n)} S(\mathfrak{F})(E_k^{(n)}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k \in I_n} a_k^{(n)} \int_{E_k^{(n)}} \frac{dS(\mathfrak{F})}{d\lambda_0} \cdot d\lambda_0 = \lim_{n\to\infty} \int_{(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)} \frac{dS(\mathfrak{F})}{d\lambda_0} \left(\sum_{k \in I_n} a_k^{(n)} \chi_{E_k^{(n)}} \right) d\lambda_0 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\lambda_0)} \frac{dS(\mathfrak{F})}{d\lambda_0} \cdot h_n d\lambda_0,$$

ceea ce demonstrează teorema.

Vom considera în cele ce urmează spațiul metric complet separabil $(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\mu_{f_1,\ldots f_p})$ și vom nota cu $\Xi_{\mathfrak{L}} = \Xi(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\mu_{f_1,\ldots f_p})$ mulțimea claselor boreliene din acest spațiu.

Teorema 2. Pentru orice $\rho \in \mathfrak{M}_1(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)$, orice $\tau \in \mathcal{M}[(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\mu_{f_1,\ldots f_p})]$ și orice $\varepsilon > 0$, există o funcție $\Xi_{\mathfrak{L}}$ etajată $\varphi : (\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1,\ldots f_p} \cap \Omega)(\mu_{f_1,\ldots f_p}) \mapsto \mathbb{R}$ astfel că :

(i) $|\rho(E)-\varphi(E)|<\varepsilon$, $E\in(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\dots f_p}\cap\Omega)(\mu_{f_1\dots f_p})$

(ii) Există un șir $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$; $h_n:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $h_n=\sum\limits_{k\in I_n}a_k^{(n)}\chi_{E_k^{(n)}}$, I_n finite, $E_k^{(n)}\in\mathcal{C}(\mathfrak{R}_p)$, astfel că:

$$\int\limits_{(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\dots f_p}\cup\Omega)(\mu_{f\dots f_p})}\varphi\,d\tau=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in I_n}a_k^{(n)}\varphi\left(E_k^{(n)}\right).$$

Demonstrație. Din [5] rezultă că $\rho\ll\mu_{f_1\dots f_p}$. Fie măsura $\tau_\rho:\mathfrak{B}_{\mathbb{R}'}\to\mathbb{R}$, definită pe axa reală prin relația:

$$\tau_\rho(\mathfrak{S})=\tau\{E;\ \rho(E)\in F\}$$

oricare ar fi mulțimea boreliană $F\subseteq\mathbb{R}'$.

Deoarece măsura $\rho\in\mathfrak{M}_1(\Omega,\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\dots f_p}\cap\Omega)$ este mărginită, rezultă că măsura τ_ρ este concentrată în intervalul mărginit (α,β).

Măsura τ_ρ poate avea cel mult o mulțime numărabilă de puncte de masă (punct de masă este un punct $x_0\in\mathbb{R}$, cu $\tau_\rho\{x_0\}=a>0$).

Într-adevăr, dacă notăm cu $g(x)=\tau_\rho(\alpha,x)$, $x\in(\alpha,\beta)$, atunci x_0 este punct de masă pentru $\tau\rho$ dacă și numai dacă x_0 este punct de discontinuitate funcției monotone $g(x)$, iar mulțimea punctelor de discontinuitate a unei funcții monotone este cel mult numărabilă. Dacă scoatem din intervalul (α,β) mulțimea acestor puncte, ceea ce rămîne este o mulțime densă pe (α,β). De aceea pentru orice $\varepsilon>0$, fixat există numerele reale $t_1,t_2,\dots t_m$, astfel că:

(a) $\alpha=t_0<t_1<\dots<t_m=\beta$.

(b) $\alpha<\rho(E)<\beta$, pentru orice $E\in(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\dots f_p}\cap\Omega)(\mu_{f_1\dots f_p})$.

(c) $t_j-t_{j-1}<\varepsilon$ pentru orice $j=1,2,\dots,m$.

(d) $\tau\{E;\ \rho(E)=t_j\}=0$, $j=1,2,\dots,m$.

Fie atunci $\mathfrak{A}_j=\{E;\ t_{j-1}\leqslant\rho(E)<t_j\}$. Evident că $\mathfrak{A}_f\in\Xi_{\mathfrak{L}}$, sînt disjuncte două cîte două și are loc: $(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\dots f_p}\cap\Omega)(\mu_{f_1\dots f_p})=\bigcup\mathfrak{A}_j$. De asemenea avem:

$$\mathfrak{F}_r(A_j)\subseteq\{E;\ \rho(E)=t_{j-1}\}\cup\{E;\ \rho(E)=t_j\}$$

ceea ce implică faptul că $\tau[\mathfrak{F}_r(\mathfrak{A}_j)]=0$, unde prin $\mathfrak{F}_r(A_j)$ am înțeles frontiera lui $\mathfrak{A}_f$ în $(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\dots f_p}\cap\Omega)(\mu_{f_1\dots f_p})$.

Notăm cu $\varphi=\sum\limits_{j=1}^{m}t_{j-1}\chi_{\mathfrak{A}_j}$ și observăm că această funcție $\Xi_{\mathfrak{L}}$ – etajată are proprietatea: $|\rho(E)-\varphi(E)|<\varepsilon$ pentru orice $E\in(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\dots f_p}\cap\Omega)(\mu_{f_1\dots f_p})$.

Din ([6] th. 63 p. 44) pentru măsura τ există un șir

$\{\tau_n\}\subseteq\mathcal{M}[(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\dots f_p}\cap\Omega)(\mu_{f_1\dots f_p})]$, $\tau_n=\sum\limits_{k\in I_n}a_k^{(n)}\delta_{E_k^{(n)}}$, $E_k^{(n)}\in\mathcal{C}(\mathfrak{R}_p)$, $\tau_n\Rightarrow\tau$.

Din [6] rezultă atunci că: $\lim_{n\to\infty} \tau_n(\mathcal{A}_j) = \tau(\mathcal{A}_j)$, $j=1, 2, \ldots, m$.

Fie $h_n = \sum_{k\in I_n} a_k^{(n)} \chi_{E_k^{(n)}}$. Avem:

$$\left| \int_{(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\ldots f_p}\cap\Omega)(\mu_{f_1\ldots f_p})} \varphi d\tau_n - \int_{(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\ldots f_p}\cap\Omega)(\mu_{f_1\ldots f_p})} \varphi d\tau \right| =$$

$$= \left| \sum_{k\in I_n} a_k^{(n)} \varphi(E_k^{(n)}) - \int_{(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\ldots f_p}\cap\Omega)(\mu_{f_1\ldots f_g})} \varphi d\tau \right| \leqslant \sum_{j=1} \tau_n(\mathcal{A}_j) - \tau(\mathcal{A}_j)| \cdot |l_{f-1}| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Deci:

$$\int_{(\mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\ldots f_p}\cap\Omega)(\mu_{f_1\ldots f_p})} \varphi d\tau = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in I_n} a_k^{(n)} \varphi(E_k^{(n)}).$$

BIBLIOGRAFIE

1. De Acosta A. D., „Existence and convergence of Probability Measures in Banach spaces". Trans. Amer. Math. Soc. 152, 273—298, 1970.
2. Dinculeanu N., „Vector Measures" Oxford, 1967.
3. Halmos P. R., „Measure Theory". Von Nostrand, Princeton, N.Y. (1950).
4. Lipovan O., „Operatorul de covarianță al măsurilor de probabilitate definite pe spațiul Banach al măsurilor reale și mărginite". Buletinul științific și tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timișoara. Seria matematică-fizică-mecanică teoretică și aplicată. Tom 22 (36) Fasc. 2—1977 (p. 364—366).
5. Lipovan O., „Asupra măsurilor de probabilitate din subspații ale spațiului Banach la măsurilor reale și mărginite". Buletinul științific și tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timișoara. Seria matematică-fizică. Tom. 24 (38), Fasc. 1—1978.
6. Parthasarathy K. R. „Probability Measures on Metric Spaces" Academic Press. New York and London, 1967.

QUELQUES REMARQUES SUR LES MESURES DE PROBABILITÉ DEFINIES SUR DES STRUCTURES GÉNÉRÉES PAR LA MESURE LEBESGUE-STIETJES DE $\mathbb{R}^p$, $p \in N$

RÉSUMÉ

En utilisant les espaces $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\ldots f_p}\cap\Omega)$, $j=0, 1, 2$, introduites dans [5] a l'aide de lame sure Lebesgue-Stieltjes de $\mathbb{R}^p$, $p \in N$ le présent travail met en évidence quelques connexions entre les mesures de probabilité definies sur $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\ldots f_p}\cap\Omega)$, $j=0, 1, 2$ et la nature intime des éléments de $\mathfrak{M}_j(\Omega, \mathfrak{L}^{(p)}_{f_1\ldots f_p}\cap\Omega)$.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 25 (39) **Fascicola 1—1980**

BOOLEAN ELEMENTS IN PRE-BOOLEAN ALGEBRAS

BY

CSABA HATVANY

§ 0. **Introduction.** In the following every lattice is considered distributive. If M is a sublattice of a lattice L, then $[m)_M$ (resp. $(m]_M$) stands for the principal filter (resp. principal ideal) generated in M by the element $m \in M$, and $[l)$ (resp. $(l]$ stands for the principal filter (resp. principal ideal) generated in L by the element $l \in L$.

If L is a lattice with 0 and 1, then an element $b \in L$ is called *Boolean* (or *complemented*) if there exists an element $-b \in L$ so that $b \cap -b = 0$ and $b \cup -b = 1$. In the case $-b$ exists, it is unique and it is called *the* (*Boolean*) *complement of* b. Let $\mathfrak{B}(L)$ denote the family of the Boolean elements of L. Clearly, $0, 1, \in \mathfrak{B}(L)$ and $\mathfrak{B}(L)$ is a Boolean sublattice of the lattice L.

The Lukasiewicz algebras may be considered as de Morgan algebras with supports in which the determination principle holds. R. Cignoli and A. Monteiro proved that

[1] *on a Kleene algebra* K *such that* $\mathfrak{B}(K)$ *is separating and lower relatively complete*

and respectively

[2] *on a lattice* L (*with* 0 *and* 1) *such that* $\mathfrak{B}(K)$ *is separating and relatively complete*

can be defined a unique Lukasiewicz algebra structure.

In many problems, as in the theory of fuzzy sets for example, the determination principle is very restrictive and so, it appears that the study of such a structure without the determination principle is useful.

The aim of this note is to introduce the de Morgan algebras with supports for which the determination principle is not postulated. Such a structure will be called pre-Boolean algebra.

In § 1 and § 2 we recall some facts concerning the de Morgan algebras and the algebras with closure operators. In § 3 we define the pre-Boolean algebras and in the last § we give for pre-Boolean algebras an analogous result as the above mentioned result of R. Cignoli and A. Monteiro for Lukasiewicz algebras.

§ 1. De Morgan Algebras.

(1.1) *Definition*, A lattice $(L, \cap, \cup)$ with a unary operator $\sim$ such that

$$M1) \quad \sim(x \cap y) = \sim x \cup \sim y$$
$$M2) \quad \sim\sim x = x$$

is called a *de Morgan lattice.*

In a de Morgan lattice we have

$$M3) \quad \sim(x \cup y) = \sim x \cap \sim y,$$
$$M4) \quad x \leqslant y \Leftrightarrow \sim x \geqslant \sim y.$$

If the de Morgan lattice A contains 0 (resp. 1), then A contains 1 (resp. 0), namely $1 : \sim 0$ (resp. $0 : \sim 1$). In this case we say that A is *a de Morgan algebra.*

Let A be a de Morgan algebra and $b \in \mathfrak{B}(A)$ so that $-b = \sim b$. Such an element is called a *regular* element. Let $\mathfrak{R}(A)$ denote the family of regular elements of A, i.e. $\mathfrak{R}(A) := \{b \in \mathfrak{B}(A) : -b = \sim b\}$. Then $\mathfrak{R}(A)$ is a de Morgan subalgebra of A and a Boolean sublattice of $\mathfrak{B}(A)$. In the case $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{B}(A)$ we say that A is a *regular* de Morgan algebra.

(1.2). *Definition.* A de Morgan algebra $(A, 0, \cap, \cup, \sim)$ such that for every $x, y \in A$

$$K)\quad x \cap \sim x \leqslant y \cup \sim y$$

is called a *Kleene algebra.*

(1.3) *Lemma.* [1] *Every Kleene algebre is a regular de Morgan algebra.* The following definition will be useful in §§ 3 and 4.

(1.4) *Definition.* If $(L, \cap, \cup)$ is a lattice satisfying the condition

$(\cap - S)$ for every $x, y \in L$ and $b \in \mathfrak{B}(L)$ such that $x \cap y \leqslant b$, there exists a Boolean element $b'_1 \geqslant x$ and a Boolean element $b'_2 \geqslant y$ providing that $b'_1 \cap b'_2 \leqslant b$, then we say that $\mathfrak{B}(L)$ is *weakly $\cap$-separating.*

Dually, if $(L, \cap, \cup)$ is a lattice satisfying the condition

$(\cup - S)$ for every $x, y \in L$ and $b \in \mathfrak{B}(L)$ such that $x \cup y \geqslant b$, there exists a Boolean element $b''_1 \leqslant x$ and a Boolean element $b''_2 \leqslant y$ providing that $b''_1 \cup b''_2 \geqslant b$, then we say that $\mathfrak{B}(L)$ is *weakly $\cup$-separating.*

If $\mathfrak{B}(L)$ is $\cap -$ and $\cup -$ separating we say that $\mathfrak{B}(L)$ is *weakly separating.*

(1.5) *Lemma. In a de Morgan algebra A, $\mathfrak{B}(A)$ is weakly $\cap -$ separating if and only if it is weakly $\cup -$ separating.*

Proof. Observing that $b \in \mathfrak{B}(A)$ implies that $\sim b \in \mathfrak{B}(A)$, the stateman follows from the properties of the operator $\sim$. *QED.*

2. Algebras with Closure Operators

(2.1) *Definition. A* lattice $(A, 0, 1) \cap, \cup)$ with a unary operator C satisfying the proprties

$C0)$ $CCx = Cx$,
$C1)$ $C(x \cup y) = Cx \cup Cy$,
$C2)$ $C0 = 0$,
$C3)$ $Cx \geqslant x$,

is called an *algebra with closures.* The operator C is called *the closure operator of A* and Cx is *the closure of x.*

If $(A, 0, 1, \cap, \cup, C)$ is an algebra with closure then we have
$C4)$ $C1 = 1$,
$C5)$ $x \leqslant y \Rightarrow Cx \leqslant Cy$,
$C6)$ $C(x \cap y) \leqslant Cx \cup Cy$.

(2.2) *Definition.* If $(L, 0, 1, \cap, \cup)$ is a lattice and $(M, 0, 1, \cap, \cup)$ is a sublatice of L so that

(LRC) for every $x \in L$ the set $\{m \in M : m \geqslant x\}$ has an infimum contained in M,

then we say that M is *lower relatively complete.*

A. Pereira Gomes had proved a result given by the following

(2.3) *Lemma* [3, 1]. *In an algebra with closure $(A, 0, 1, \cap, \cup, C)$ the set* Inv (C) *of all invariant elements of C is lower relatively complete and moreover, for every $x \in L$,* $\inf \{c \in \mathrm{Inv}(C) : c \geqslant x\} = Cx$. *Conversely, if $(L, 0, 1, \cap, \cup)$ is a lattice and $(M, 0, 1, \cap, \cup)$ is a lower relatively complete sublattice of L, then*

the unary operator C defined by the formula $Cx := \inf\{m \in M : m \geqslant x\}$ is a closure operator on L and $\mathrm{Inv}(C) = M$.

Clearly, by duality we obtain the notions of *algebra with interior, upper relatively complete sublattice* of a lattice and a dual result of that of Lemma (2.3).

§ 3. Pre-Boolean Algebras

(3.1) *Definition.* A lattice $(A, 0, \cap, \cup)$ with a unary operator ∇ satisfying the properties

$S1)$ $\nabla(x \cap y) = \nabla x \cap \nabla y$,

$S2)$ $\nabla 0 = 0$,

$S3)$ $\nabla x \geqslant x$

is called an *algebra with supports.* The operator ∇ is called *the support operator of* A and ∇x is *the support of* x.

It is easy to verify that in an algebra with supports we have

$S4)$ $\nabla 1 = 1$,

$S5)$ $x \leqslant y \Rightarrow \nabla x \leqslant \nabla y$.

By duality we obtain the notion of algebra with kernels $(A, 1, \cap, \cup, \Delta)$. The main result of this is the following.

(3.2) *Theorem. Let $(A, 0, \cap, \cup, \sim, \nabla)$ be such a system that $(A, 0, \cap, \cup \sim)$ is a de Morgan algebra, $(A, 0, \cap, \cup, \nabla)$ is an algebra with supports and one of the following equivalent compatibility conditions holds :*

I) $\sim x \cup \nabla x = 1$,

II) $x \cup \nabla \sim x = 1$,

III) $x \cap \Delta \sim x = 0$,

IV) $\sim x \cap \sim \nabla \sim x = 0$.

Then,

1) $\Delta := \sim \nabla \sim$ *is a kernel operator,*

2) $\mathrm{Inv}(\nabla)$ *is a Boolean algebra,*

3) ∇ *is a closure operator,*

4) $[x) \bigcap \mathrm{Inv}(\triangle) = [\nabla x)_{\mathrm{Inv}(\nabla)}$ *for every* $x \in A$,

5) $\mathrm{Inv}(\nabla) = \mathfrak{B}(A)$,

and dually,

1′) $\nabla = \sim \triangle \sim$,

2′) $\mathrm{Inv}(\triangle)$ *is a Boolean algebra,*

3′) $\triangle$ *is an interior operator,*

4′) $(x] \bigcap \mathrm{Inv}(\triangle) = (\Delta x]_{\mathrm{Inv}(\Delta)}$ *for every* $x \in A$,

5′) $\mathrm{Inv}(\triangle) = \mathfrak{B}(A)$.

Proof :

1) follows from the definition of $\triangle$.

2) We shall prove first that $C0)$ holds for ∇. If in II) we replace x by ∇x and applying ∇ to III) we get

$\nabla x \cup \nabla \sim \nabla x = 1$

$\nabla x \cap \nabla \sim \nabla x = 0$,

and so $\nabla x \in \mathfrak{B}(A)$ and $-\nabla x = \nabla \sim \nabla x$. Replacing x by $\sim \nabla x$ in $S3)$ we have $\nabla x \leqslant \nabla \sim \nabla x$ or $\nabla x \cap \sim \nabla x \leqslant \nabla x \cap \nabla \sim \nabla x$, and so $\nabla x \cap \sim \nabla x = 0$. Using $\sim$, from the last equality we get $\sim \nabla x \cup \nabla x = 1$. So we have $-\nabla x = \sim \nabla x$. Now we conclude that

a) $\sim \nabla x = \nabla \sim \nabla x$.

On the other hand, from $S2)$, II, $M1)$ and $S1)$ follows that $0 = \nabla 0 = \nabla \sim 1 = \nabla \sim (x \cup \nabla \sim x) = \nabla(\sim x \cap \sim \nabla \sim x) = \nabla \sim x \cap \nabla \sim \nabla \sim x$. From this and from II) we nave that $x = x \cup 0 = x \cup (\nabla \sim x \cap \nabla \sim \nabla \sim x) = (x \cup \nabla \sim x) \cap (x \cup \nabla \sim \nabla \sim x) = 1 \cap (x \cup \nabla \sim \nabla \sim x) = x \cup \nabla \sim \nabla \sim x$, i.e. $\nabla \sim \nabla \sim x \leqslant x$. For $\nabla \sim x$ this inequality

becomes $\nabla\sim\nabla\sim\nabla\sim x\leqslant\nabla\sim x$ and applying the operator $\nabla\sim$ to the same inequality we have $\nabla\sim\nabla\sim\nabla\sim x\geqslant\nabla\sim x$. Hence,

b) $\nabla\sim\nabla\sim\nabla\sim x=\nabla\sim x$.

Applying $\nabla\sim$ to a) and considering b) for $\sim x$, we can write $\nabla\nabla x=$ $=\nabla\sim\nabla\sim\nabla x$ and $\nabla\sim\nabla\sim\nabla x=\nabla x$. Hence, $\nabla\nabla x=\nabla x$ and this is CO) for ∇.

Now we shall prove that Inv (∇) is a Boolean algebra. Let $x\ y,\in$ Inv (∇). Then $\nabla(x\cap y)=\nabla x\cap\nabla y=x\cap y$, i.e. $x\cap y\in$ Inv (∇). If $x\in$ Inv (∇), then $\nabla\sim x=$ $\nabla\sim\nabla x=\sim\nabla x$ by a), and that means that $\sim x\in$ Inv (∇). From these we deduce that if $x,\ y\in$ Inv (∇), then $\sim x,\ \sim y\in$ Inv (∇), hence $\sim(\sim x\cap\sim y)=x\cup y\in$ $\in$ Inv (∇). Clearly, $0,\ 1\in$ Inv (∇). Finally, for $x\in$ Inv (∇) I) and IV imply that $\sim x\cup x=1$ and $\sim x\cap x=0$. In other words, (Inv (∇), 0, 1, $\cap$, $\cup$, $\sim$) is a Boolean algebra. Moreover, for $x\in$ Inv (∇), $-x=\sim x$ and hence Inv $(\nabla)\subset\mathfrak{B}(A)$. Also from above it results that $\nabla x,\ \Delta x\in$ Inv (∇) for every $x\in$ Inv (∇).

3) We must verify C1). From $x,\ y\leqslant x\cup y$, recalling S5) we have $\nabla x,$ $\nabla y\leqslant\nabla(x\cup y)$ and hence $\nabla x\cup\nabla y\leqslant\nabla(x\cup y)$. On the other hand $x\leqslant\nabla x$ and $y\leqslant\nabla y$ imply $x\cup y\leqslant\nabla x\cup\nabla y$. Now applying ∇ and taking account that $\nabla x\cup$ $\cup\nabla y\in$ Inv (∇), we have $\nabla(x\cup y)\leqslant\ \nabla(\nabla x\cup\nabla y)=\nabla x\cup\nabla y$.

4) The fact that for every $x\in A\cap[x)\cap$Inv (∇) is a filter is obvious. It remainds to prove only the required equality.

If $y\in[\nabla x)_{\text{Inv}(\Delta)}$, then $y=\nabla y\geqslant\nabla x\geqslant x$ and hence $y\in[x)\bigcap Inv\ (\nabla)$. Conversely for $y\in[x)\bigcap$Inv (∇) we have $y\geqslant x$ and $y=\nabla y$. Then $y\cap\nabla x=\nabla y\cap\nabla x=\nabla\ (y\cap x)$, hence $y\geqslant\nabla x$ or equivalently $y\in[\nabla x)_{\text{Inv}(\Delta)}$.

5) The inclusion Inv $(\nabla)\ \cup\mathfrak{B}(A)$ was shown in 2). Suppose that $b\in\mathfrak{B}(A)$. Then there exists $-b\in\mathfrak{B}(A)$ so that $b\cap-b=0$ and $b\cup-b=1$. Using ∇ we get $\nabla b\cap\nabla-b=0$ and $\nabla b\cup\nabla-b=1$ and hereby $\nabla-b=-\nabla b$ for every $b\in\mathfrak{B}(A)$. On the other hand, for every $b\in\mathfrak{B}(A)$, $b\leqslant\nabla b$ or $-b\geqslant-\nabla b=\nabla-b$. But this means $-b=\nabla-b=-\nabla b$ or $b=\nabla b$. It follows that $\mathfrak{B}(A)\subset Inv\ (\nabla)$.

1′) $\sim\nabla\sim=\sim\sim\nabla\sim\sim=\nabla$.

2′) We shall prove that Inv $(\nabla)=$Inv (∇). If $x\in$ Inv (∇) we have $\nabla x=$ $=\nabla\Delta x=\nabla\sim\nabla\sim x\ =\ \sim\nabla\sim x=\Delta x=x$. Conversely, if $x\in$ Inv (∇) we have $\Delta x=\Delta\nabla x=\sim\nabla\sim\nabla x=\sim\nabla\sim x=\sim\sim x=x$.

3′) follows from the definition of Δ.

4′) $(x]\bigcap$Inv $(\Delta)=\sim[\sim x)\cap$ Inv $(\nabla)=\sim[\nabla\sim x)_{\text{Inv}(\Delta)}=\sim\sim\ (\sim\nabla\sim x]_{\text{Inv}(\Delta)}=$ $=(\nabla x]_{\text{Inv}(\Delta)}$.

5′) follows from 2′).

The theorem is completely proved.

By duality we can state

(3.3) *Theorem. Let* $(A,\ 1,\ \cap,\ \cup,\ \sim,\ \Delta)$ *be such a system that* $(A,\ 1,\ \cap,\ \cup,\ \sim f$ *is a de Morgan algebra,* $(A,\ 1,\ \cap,\ \cup,\ \Delta)$ *is an algebra with kernels and one o) the following equivalent compatibility conditions holds:*

I′) $\sim x\cap\Delta x=0$,

II′) $x\cap\Delta\sim x=0$,

III′) $x\cup\sim\Delta x=1$,

IV′) $\sim x\cup\sim\Delta\sim x=1$.

Then,

1′) $\nabla:=\sim\Delta\sim$ *is a support operator,*

2′) Inv (Δ) *is a Boolean algebra,*

3′) Δ *is an interior operator,*

4′) $(x]\bigcap$ Inv $(\Delta)=(\Delta x]_{\text{Inv}(\Delta)}$ *for every* $x\in A$,

5′) Inv $(\Delta)=\mathfrak{B}(A)$,

and dually,

1) $\Delta=\sim\nabla\sim$,

2) Inv (∇) *is a Boolean algebra,*

3) ∇ *is a closure operator,*

4) $[x) \cap \mathrm{Inv}(\nabla) = [\nabla x)_{\mathrm{Inv}(\Delta)}$ *for every* $x \in A$,

5) $Inv(\nabla) = \mathfrak{B}(A)$.

According to these facts we give the following.

(3.4) *Definition.* A system $(A, 0, \cap, \cup, \sim, \nabla)$ with the property that $(A, 0, \cap, \cap, \sim)$ is a de Morgan algebra, $(A, 0, \cap, \cap, \nabla)$ is an algebra with supports and

I) $\sim x \cup \nabla x = 1$;

or dually, a system $(A, 1, \cap, \cup, \sim, \nabla)$ with the property that $(A, 1, \cap, \cup, \sim)$ is a de Morgan algebra, $(A, 1, \cap, \cup, \nabla)$ is an algebra with kernels and

I') $\sim x \cup \nabla x = 0$

is called a *de Morgan algebra with supports* or a *de Morgan algebra with kernels* or a *pre-Boolean algebra.*

§ 4. **Characteristic Properties of Boolean Elements of Pre-Boolean Algebra**

Theorem (3.2) and Theorem (3.3) show taht in a pre-Boolean algebra A $\mathrm{Inv}(\nabla) = \mathfrak{B}(A) = \mathrm{Inv}(\nabla)$ and for every $x \in A$ $\nabla x = \inf \{b \in \mathfrak{B}(A) : b \geqslant x\}$ and $\Delta x = \sup \{b \in \mathfrak{B}(A) : b \leqslant x\}$. Hence $\mathfrak{B}(A)$ is relatively complete. We shall prove that $\mathfrak{B}(A)$ is also weakly separating.

By (1.5) it is sufficient to show that $\mathfrak{B}(A)$ is $\cap$ – separating. For $x, y \in A$, $b \in \mathfrak{B}(A)$ such that $x \cap y \leqslant b$ we have $\nabla x \geqslant x$, $\nabla y \geqslant y$ and $\nabla(x \cap y) = \nabla x \cap \nabla y \leqslant b$.

Now we can summarize :

In a pre-Boolean algebra A the sublattice $\mathfrak{B}(A)$ *coincides with* $\mathrm{Inv}(\nabla) = \mathrm{Inv}(\Delta)$ *and is weakly separating and relatively complete.*

From the proof of (3.2) if follows that a pre-Boolean algebra is even a regular de Morgan algebra.

The next theorem shows that these properties characterize the Boolean elementsof a pre-Boolean algebra.

(4.1) *Theorem. Let* $(A, 0, 1, \cap, \cup, \sim)$ *be a regular de Morgan algebra with* $\mathfrak{B}(A)$ *weakly separating and reletively complete. Then there exists a unique structure of pre-Boolean algebra* $(A, 0, 1, \cap, \cap, \sim, \nabla, \Delta)$ on A with $\mathrm{Inv}(\nabla) = \mathrm{Inv}(\Delta) = \mathfrak{B}(A)$.

Proof. From (2.3) and its dual it follows that $(A, 0, \cap, \cup, \sim, \nabla)$ is an algebra with closure and $(A, 1, \cap, \cup, \sim, \Delta)$ is analgebra with interior where $\nabla x = \inf \{b \in \mathfrak{B}(A) : b \geqslant x\}$ and $\Delta x = \sup \{b \in \mathfrak{B}(A) : b \leqslant x\}$. Moreover, $\mathrm{Inv}(\nabla) = \mathfrak{B}(A) = \mathrm{Inv}(\Delta)$ and ∇ (resp. Δ) is the unique closure (resp. interior) operator with this property. To show that ∇ is also a support operator we need to verify *S1*). $\mathfrak{B}(A)$ is weakly separating and $x \cap y \leqslant \nabla(x \cap y)$. Then there exists $b_1 \geqslant \nabla x \geqslant x$ and $b_2 \geqslant \nabla y \geqslant y$. $b_1, b_2 \in \mathfrak{B}(A)$ so that $\nabla x \cap \nabla y \leqslant b_1 \cap b_2 \leqslant \nabla(x \cup y)$. These inequality and *C6*) imply *S1*).

To verify I) let x be an arbitrary element of A. Then $x \leqslant \nabla x$ and $\sim x \geqslant \nabla x$. By $\nabla x \in \mathfrak{B}(A)$ and by the fact that A is a regular de Morgan algebra, we can write $-\nabla x = \sim \nabla x$. Joining both sides of $\sim x \geqslant \sim \nabla x$ with ∇x and recalling the last equality we have $\sim x \cup \nabla x \geqslant \sim \nabla x \cup \nabla x = -\nabla x \cup \nabla x = 1$, hence $\sim x \cup \nabla x = 1$. *QED.*

REFERENCES

1. Cignoli, R., Boolean Elements in Lukasiewicz Algebras, Proc. Japan Acad., **41**, 670—675 (1965).
2. Cignoli, R., Monteiro, A., Boolean Elements in Lukasiewicz Algebras, Proc. Japan Acad., **41**, 676—680 (1965).
3. Pereira Gomes, A., Introducão ao estudo duma nocão de functional en espacos sem pontos, Port. Math., **11**, 169—172 (1952).

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 1—1980**

TRIVIAL REGIONS OF INFINITESIMAL DEFORMATIONS

BY
CSABA HATVANY

In this note we announce a generalisation of a result of Schuster [5].

1. **Base changes.** Let A be an Artinian (complex) analytic algebra. By an *(analytic infinitesimal) base change (for* A) we mean a pair of homomorphisms $\mathcal{A} := (\alpha', \beta')$ such that $\alpha' : A' \to A$ is an epimorphism of Artinian analytic algebras and $\beta' : A \to A'$ is a right inverse of α'.

A morphism $g : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ of base changes is a homomorphism $g : A' \to A'$ of Artinian analytic algebras such that $g\beta' = \beta''$ and $\alpha'' g = \alpha'$.

Let us denote by $\mathcal{C}_A$ the category of base changes for A. In particular, $\mathcal{C}_C$ is equivalent to the category of Artinian algebras. The trivial base change $\mathcal{A} := (\mathrm{id}\ A, \mathrm{id}\ A)$ is the null object in $\mathcal{C}_A$.

2. **Analytic-spaces and the Hilbert modular space.** Let Ansp denote the category of (complex) analytic spaces. An *analytic A-space* X/A is a proper and flat analytic space $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ over the analytic space Spec (A) defined by the Artinian analytic algebra A.

Let us denote by $A-$Ansp the full subcategory of Ansp/Spec (A) determined by the analytic A-spaces, while Ansp/Spec (A) is the category of analytic spaces over Spec (A). In particular, C-Ansp is the full subcategory of Ansp determined by the compact analytic spaces.

Sometimes, if no confusion is possible, we write simply A for Spec (A).

For every analytic A-space X/A we consider the contravariant functor $\mathrm{Hilb}_{X/A} : \mathrm{Ansp/Spec}\ (A) \to \mathrm{Sets}$ defined as follows:

For $Y/\mathrm{Spec}\ (A)$, $\mathrm{Hilb}_{X/A}(Y)$ is the set of the closed analytic subspaces of $X \times_A Y$ which are proper and flat over Y. For a morphism $g : Y_1 \to Y$ in Ansp/Spec (A), $\mathrm{Hilb}_{X/A}(g)$ is defined by $H \to H \times_{Y} Y_1$, for every $H \in \mathrm{Hilb}_{X/A}(Y_2)$.

Following a conjecture of Grothendieck [2], exposseé 16, Douady [1] and Pourcin [4] showed that $\mathrm{Hilb}_{X/A}$ is representable. The analytic space over Spec (A) representing the functor $\mathrm{Hilb}_{X/A}$ is called the *Hilbert modular space of* X/A and will be denoted also by $\mathrm{Hilb}_{X/A}$.

Versy useful for our aim is the functor $\mathrm{Isom}_A(X, Y)$, where X and Y are analytic A-spaces. This functor is defined by setting

$$\mathrm{Isom}_A(X, Y)(Z) := Isom_{\mathrm{Ansp}/Z}(X \times_A Z, Y \times_A Z)$$

for every Z in Ansp/Spec (A). We are interested in the following.

Proposition. $\mathrm{Isom}_A(X, Y)$ is represented by an open subspace of $\mathrm{Hilb}_{Y \times_A X/A}$.

3. **Infinitesimal deformations.** By an *(analytic infinitesimal) deformation* of an analytic A-space X/A by the base change $\mathcal{A}'$ for A, we mean a pair $D = : (X'/A', i)$ of an analytic A'-space X'/A' and an isomorphism of analytic A-spaces $i : (\mathrm{id} \mid X \mid, \iota) : X \to X'_{\times_{A'}} A$.

The equivalence $\sim$ of two deformations of X/A by the same base change, and the induced deformation $D/\mathcal{A}''$ on $\mathcal{A}''$ by a deformation D of X/A by $\mathcal{A}'$, for a given morphism $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ in $\mathcal{C}_A$, are defined as usually. The trivial deformation $D_{\mathcal{A}'}$ of X/A by $\mathcal{A}'$ is $(X \times_A A'/A', \mathrm{id}\ X)$.

4. **The trivial region.** We consider the *trivialisation functor* Triv_D of a deformation D of X/A by $\mathcal{A}'$, as defined by setting

$$\mathrm{Triv}_D(\mathcal{A}'') := \{g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\mathcal{A}', \mathcal{A}''),\ D/\mathcal{A}'' \sim D_{\mathcal{A}''}\},$$

for every $\mathcal{A}''$ in $\mathcal{C}_A$, and $\mathrm{Triv}_D(u) := u\circ - : \mathrm{Triv}_D(\mathcal{A}'') \to \mathrm{Triv}_D(\mathcal{A}''')$, for every morphism $u : \mathcal{A}'' \to \mathcal{A}'''$ in $\mathcal{C}_A$.

If the functor Triv_D is representable, we say that D is *trivialisable* and then, there is a base chage for A, denoted also by Triv_D, and an epimorphism $\pi_D : \mathcal{A}' \to \mathrm{Triv}_D$ satisfying the following two properties:

1) D/Triv_D is trivial;

2) for every morphism $u : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ in $\mathcal{C}_A$ such that $D/\mathcal{A}'' \sim D_{\mathcal{A}}$, there is a morphism $u' : \mathrm{Triv}_D \to \mathcal{A}''$ such that $u'\pi_D = u$.

An analytic A-space X/A is called *rigid(ificable) for the base change* $\mathcal{A}'$ if every deformation D of X/A by $\mathcal{A}'$ is trivial (isable). An analytic A-space X/A is called *rigid(ificable)* if it is rigid(ificable) for every base change.

If X/A is rigidificable, then every deformation X/A' of X/A has a rigid closed subspace. This fact justifies the terminology.

Rigidificability Criterion. Let X/A be an analytic A-space and suppose there is a correspondence $\{\Phi^X_{\mathcal{A}'}\}_{\mathcal{A}' \in Ob(\mathcal{C}_A)} = : \Phi^X$ which assigns to every class $[D]$ of deformations of X/A by $\mathcal{A}'$ a pair $(\Phi^X_{\mathcal{A}'}(D),\ \varphi^X_{\mathcal{A}'}(D))$ with $\Phi^X_{\mathcal{A}'}(D)$ in $A-\mathrm{Analg}$ and $\varphi^X_{\mathcal{A}'}(D) : A' \to \Phi^X_{\mathcal{A}'}(D)$ a morphism in $A-\mathrm{Analg}$, and satisfies the following conditions:

1) if $h : \Phi^X_{\mathcal{A}'}(D) \to \Phi^X_{\mathcal{A}'}(D_{\mathcal{A}'})$ is an isomorphism such that $h\cdot\varphi^X_{\mathcal{A}'}(D) = \varphi^X_{\mathcal{A}'}(D_{\mathcal{A}'})$, then $D \sim D_{\mathcal{A}'}$;

2) if $g : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ is a morphism in $\mathcal{C}_A$, then there is an isomorphism $h : \Phi^X_{\mathcal{A}'}(D) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{A'} A'' \to \Phi^X_{\mathcal{A}''}(D/\mathcal{A}'')$ such that $h\cdot(\varphi^X_{\mathcal{A}'}(D) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{A'} A'') = \varphi^X_{\mathcal{A}''}(D/\mathcal{A}'')$;

3) there is an isomorphism $i : A\{X_1, \ldots, X_n\} \to \Phi^X_{\mathcal{A}'}(D_{\mathcal{A}})$ such that $i\cdot j = \varphi^X_{\mathcal{A}}(D_{\mathcal{A}})$, where $j : A \to A\{X_1, \ldots, X_n\}$ is the canonic monomorphism.

In these conditions X/A is rigidificable.

5. **Rigidificable A-spaces.** Our result is the following.

Theorem. If the space $\mathrm{Hilb}_{X\times_A X/A}$ is flat over $\mathrm{Spec}(A)$, then the analytic A-space X/A is rigidificable.

We sketch the proof (detailed proofs are given in [3]). For a deformation $D = (X/A', i)$ of X/A by $\mathcal{A}'$ the functor $\mathrm{Isom}_{A'}(X\times_A A', X')$ gives us the isomorphism h: $\mathrm{Isom}_A(X, X'\times_{A'} A) \approx Hom_{A'}(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Isom}_{A'}(X\times_A A', X'))$. We take for $\Phi^X_{\mathcal{A}'}(D)$ the stalk in $h(i)$ of the structural sheaf of $\mathrm{Isom}_{A'}(X\times_A A', X')$ and apply the Rigidificability Criterion.

If $A = \mathbf{C}$ we obtain the result of Schuster [5]:

Consequence. Every compact analytic space is rigidificable.

BIBLIOGRAPHY

1. Douady, A., Le Problème des Modules ..., Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **16**, 1–95 (1966).
2. Grothendieck, A., Seminaire Cartan, t. 13, 1960/1961, 2 eddition.
3. Hatvany, Cs., Trivial Regions of Infinitesimal Deformations of Analytic A-spaces. to appear
4. Pourcin, G., Thèoréme de Douady au-dessus de S, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XIII, III (1969).
5. Schuster, H. W., Über den trivialen Ort von Deformationen Komplexer Strukturen, Math. Ann., **194**, 135–146 (1971)

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ–FIZICĂ
Tom 25 (39) Fascicola 1–1980

σ-ALGEBRE ŞI MĂSURI FUZZY

DE

EUGEN ROVENŢA

0. **Introducere.** Necesitatea introducerii unor funcţii de apartenenţă a căror valori să ne indice gradul de apartenenţă a unui element la o mulţime fuzzy, precum şi stabilirea unor relaţii fuzii prin înlocuirea variabilelor precise, numerice de pînă acum cu variabile fuzzy, aparţine lui L. A. Zadeh [1].

Pentru a înţelege noţiunea de mulţime fuzzy se pleacă de la faptul că dacă X este spaţiul de elelement generic x, familia părţilor lui X notată cu $\mathfrak{L}(X)=\{A \mid A \leqslant X\}$ este o algebră Boole faţă de operaţiile de reuniune, intersecţie şi complementară uzuale. Formează structură de algebră Boole faţă de următoarele operaţii $(\varphi_A \vee \varphi_B)(x)=max\,(\varphi_A(x),\ \varphi_B(x)),(\varphi_A \wedge \varphi_B)(x)=\min(\varphi_A(x), \varphi_B(x))$ şi $(C\varphi_A)(x)=1-\varphi_A(x)$ şi mulţimea tuturor funcţiilor caracteristice definite pe X, $\{0, 1\}^X=\{\varphi_A : X \to \{0, 1\},\ \varphi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$. Între ele există o corespondenţă bijectivă, care păstrează operaţiile, deci sînt izomorfe ca algebre Boole. În consecinţă orice submulţime A în sens uzual a lui X se poate identifica cu funcţia ei caracteristică φ_A şi vom folosi pentru amîndouă notaţia de mulţime A. ($A(x)$ va reprezenta valoarea funcţiei în punctul x). Clasele de mulţimi uzuale se vor nota cu $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathcal{C}$, Σ, Ξ, Φ etc.

Submulţimile fuzzy ale spaţiului X sînt în corespondenţă bijectivă cu mulţimea mai bogată a funcţiilor $\{\chi : X \to [0, 1]\ \{=[0, 1]^X$ numite funcţii de apartenenţă cu care le vom identifica şi le vom nota cu $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, $\tilde{\sigma}$ etc. Clasele de mulţimi fuzzy se vor nota cu $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathfrak{B}}$, $\tilde{\mathcal{C}}$, $\tilde{\Sigma}$, $\tilde{\Xi}$, $\tilde{\Phi}$ etc.

În [1], L.A. Zadeh introduce noţiunea de mulţime fuzzy în care spre deosebire de mulţimile uzuale este posibil ca între apartenenţa unui element la o astfel de mulţime şi neapartenenţa să existe o serie de situaţii tranzitorii de natură continuă şi care este caracterizată de o funcţie care ia valori în intervalul [0, 1].

0.1. **Definiţie.** [1] Fie X o mulţime arbitrară. O mulţime fuzzy $\tilde{F}\subseteq X$ este mulţimea perechilor ordonate $\tilde{F}=\{(x, \tilde{F}(x))\}_{x\in X}$ unde $\tilde{F}\in[0, 1]^X$ şi se numeţte funcţia de apartenenţă a unui element $x\in X$ la $\tilde{F}$. Valoarea funcţiei în punctul x, $\tilde{F}(x)$ reprezintă prin definiţie gradul de apartenenţă a elementului $x\in X$ la $\tilde{F}$.

Clasa submulţimilor fuzzy din spaţiul X se va nota cu $F(x)$.

În principiu la orice afirmaţie cu caracter imprecis se poate asocia o mulţime fuzzy. Din subiectivismul construţiei rezultă că această funcţie va fi unică. Evident că se urmăreşte ca ea să corespundă cît mai bine problemei concrete considerate, deci întreg procesul este guvernat la rîndul său de o altă funcţie de apartenenţă. Oricum procesul poate fi efectuat, deci unei afir-

mații cu caracter imprecis putem să-i atașăm o funcție de apartenență din mulțimea $F(x)$.

De exemplu „mulțimea numerelor reale mult mai mari ca 1" se asociază cu o mulțime fuzzy în R, notată cu $\tilde{F}$. Pentru $\tilde{F}$ putem considera funcția de apartenență.

$$\tilde{F}(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\leqslant 1 \\ [1+324\,(x-1)^{-2}]^{-1}, & x>1 \end{cases}$$

Aceste funcții de apartenență pot fi date tabular, cu ajutorul unor formule, printr-un algoritm recursiv sau în funcție de alte funcții de apartenență.

Așadar noțiunea de apartenență își pierde rolul din cazul mulțimilor uzuale, în cadrul mulțimilor fuzzy nu are sens a spune despre punctul x că aparține mulțimii fuzzy $\tilde{F}$.

Trebuie subliniat că între tehnicile matematice operînd cu concepte fuzzy și cele ale teoriei probabilităților, există deosebire netă, fenomenul aleator rezultînd din nesiguranța în ceea ce privește apartenența sau neapartenența unui obiect la o mulțime uzuală în timp ce în cadrul unui fenomen de natură fuzzy grade de apartenență intermediare între apartenența completă și neapartenența.

Spațiul X va fi identificat cu funcția $\tilde{1}$ definită prin $\tilde{1}(x)=1$, $\forall x\in X$ iar mulțimea vidă $\emptyset$ va fi identificată cu funcția $\tilde{0}$ definită prin $\tilde{0}(x)=0$, $\forall x\in X$.

0.2. **Definiție.** Dacă $\tilde{\mathcal{F}}=\{\tilde{F}_i\}_{i\in I}$ este o familie de mulțimi fuzzy din spațiul X atunci

1) $\tilde{F}_i=\tilde{F}_j \Leftrightarrow \tilde{F}_i(x)=\tilde{F}_j(x)$. $\quad (i,j\in I),\ x\in X.$

2) $\tilde{F}_i\subseteq\tilde{F}_j \Leftrightarrow \tilde{F}_i(x)\leqslant\tilde{F}_j(x)$ $\quad (i,j\in I),\ x\in X.$

3) $\tilde{A}=\bigcup\limits_{i\in I}\tilde{F}_i \Leftrightarrow \tilde{A}(x)=\bigvee\limits_{i\in I}\tilde{F}_i(x)=\sup\limits_{i\in I}\{\tilde{F}_i(x)\},\ x\in X.$

4) $\tilde{B}=\bigcap\limits_{i\in I}F_i \Leftrightarrow \tilde{B}(x)=\bigwedge\limits_{i\in I}\tilde{F}_i(x)=\inf\limits_{i\in I}\{\tilde{F}_i(x)\},\ x\in X.$

5) $\tilde{F}_i'=C\tilde{F}_i \Leftrightarrow \tilde{F}_i'(x)=\tilde{1}-\tilde{F}_i(x)\cdot(i\in I),\ x\in X.$

6) $\tilde{D}_a=|\tilde{F}_i-\tilde{F}_j| \Leftrightarrow \tilde{D}_s(x)=|\tilde{F}_i(x)-\tilde{F}_j(x)|\ i,j\in I,\ x\in X.$

7) $\tilde{D}=\tilde{F}_1-\tilde{F}_2,\ \tilde{F}_2\subseteq\tilde{F}_1 \Leftrightarrow \tilde{D}(x)=\tilde{F}_1(x)-\tilde{F}_2(x),\ x\in X.$

0.3. **Observație.** a) Reuniunea (resp. intersecția) a două mulțimi fuzzy $\tilde{F}_1$ și $\tilde{F}_2$ este cea mai mică (resp. cea mai mare) mulțime fuzzy care conține (resp. este conținută în) amîndouă $\tilde{F}_1$ și $\tilde{F}_2$.

b) Definiția 5) a complementarei unei mulțimi fuzzy manifestă deosebiri esențiale față de complementare unei mulțimi uzuale. Astfel este posibil ca $\tilde{F}\subseteq C\tilde{F}$, $\tilde{F}\cap C\tilde{F}\neq\tilde{0}$ și $\tilde{F}\cup C\tilde{F}\neq\tilde{1}$.

1. Considerațiile din această lucrare urmăresc a prezenta o definiție generală a $\sigma-$algebrelor și măsurilor fuzzy și a studia cîteva proprietăți legate de acestea.

Una din cele mai importante proprietăți a unei $C-$algebre $\mathfrak{B}$ de mulțimi uzuale este posibilitatea exprimării reuniunii unei familii numărabile de mulțimi din $\mathfrak{B}$ cu ajutorul unei familii numărabile de mulțimi disjuncte din $\mathfrak{B}$. Ținîndu-se seama de aceasta precum și de proprietatea de numărabil aditivitate a măsurii uzuale se obțin multe rezultate importante ca monotonia, sub-

stractivitatea, proprietatea de trecere la limită sub semnul măsură în cazul unui șir crescător de mulțimi din $\mathfrak{B}$ (continuitatea inferioară), numărabil subaditivitatea și altele.

În cazul teoriei mulțimilor fuzzy nu se obțin proprietăți analoage, cauza trebuind căutată în dificultățile provocate de definiția complementarei unei mulțimi fuzzy.

Pentru a se obține însă rezultate semnificative va trebui să se impună condiții mai puternice în definiția măsurii fuzzy. Astfel în locul numărabil aditivității se va presupune finit aditivitatea și continuitatea inferioară iar pentru măsurile fuzzy pozitive se va presupune în plus monotonia.

1.1. **Definiție.** Se numește șir de mulțimi fuzzy o aplicație

$$h : N \to [0, 1]^X.$$

În majoritatea cazurilor aplicația h va fi identificată cu mulțimea $\{h(k)\}_{k\in N}$ sau folosind notația indexată cu $\{\tilde{F}_k\}_{k\in N}$ sau pur și simplu cu $\{\tilde{F}_k\}$.

1.2. **Definiție.** Se numește σ – algebră fuzzy o clasă $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}(X)$ care verifică axiomele :

(S.A.F.I) $\tilde{I} \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(S.A.F.II) $\{\tilde{A}_n\} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ implică $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(S.A.F.III) $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ implică $\mathbb{C}\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$.

1.3. **Consecințe.** $\{\tilde{A}_n\} \supseteq \tilde{\mathcal{A}}$ implică $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}}$. Afirmația rezultă din

$$1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}\tilde{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (1 - \mathbb{C}\tilde{A}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}}$$

O clasă $\tilde{\mathcal{M}}$ nevidă de mulțimi din $\tilde{\mathcal{F}}(X)$ se zice monotonă dacă din faptul că $\{\tilde{A}_n\} \subseteq \tilde{\mathcal{M}}$ este un șir monoton rezultă că $\lim_{n\to\infty} \tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{M}}$ (unde $\lim_{n\to\infty} A_n$ este considerată ca limită de șiruri de funcții în topologia naturală pe dreaptă). Se observă că orice σ – algebră fuzzy este o clasă monotonă.

1.4. **Observație.** Condițiile (S.A.F. II) și (S.A.F.III) în general nu implică (S.A.F. I). De exemplu fie X o mulțime arbitrară, $B=[1/3, 2/3]$ și $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{A}_\alpha \mid \tilde{A}_\alpha : X \to [0, 1],\ \tilde{A}_\alpha(x)=\alpha,\ \alpha \in B\}$. Se observă că $\bigcup_{\alpha\in B} \tilde{A}_\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\bigcup_{\alpha\in B} \tilde{A}_\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}$, $1 - \tilde{A}_\alpha = \tilde{A}_{1-\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}$ dar condiția (S.A.F.I) nu este îndeplinită.

1.5. **Observație.** Se știe din Def. 0.2. că prin diferența a două mulțimi fuzzy $\tilde{A},\ \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}},\ \tilde{B} \subseteq \tilde{A}$ înțelegem $(\tilde{A} - \tilde{B})(x) = \tilde{A}(x) - \tilde{B}(x)$. Se observă că în general nu mai avem ca consecință a axiomelor σ – algebrelor fuzzy faptul că o dată cu două elemente și diferența lor aparține σ – algebrei respective. De exemplu fie $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$ unde $\tilde{A}_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1/2, & x > 0 \end{cases}$ și $\tilde{A}_2(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 0 \\ 1/2, & x > 0 \end{cases}$. Se verifică imediat că $\tilde{\mathcal{A}}$ este o σ – algebră fuzzy dar $\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 \notin \tilde{\mathcal{A}}$.

Pentru ca să fie adevărat acest lucru trebuie impus ca o axiomă suplimentară :

(S.A.F.IV) $\tilde{A},\ \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}},\ \tilde{A} \supseteq \tilde{B}$, implică $\tilde{A} - \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}}$.

1.6. **Definiţie.** Clasa de mulţimi uzuale $\mathfrak{N} = \{A \in \tilde{\mathfrak{A}} \mid A \in \mathfrak{A}(x)\}$ se numeşte nucleul σ – algebrei fuzzy $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Se observă că nucleul $\mathfrak{N}$ este o σ – algebră propriu-zisă. O definiţie echivalentă a σ – algebrelor fuzzy este prezentată în [3], unde este definit şi nucleul unei σ – algebre fuzzy.

În cele ce urmează o mare importanţă o vor prezenta teoremele adevărate numai dacă este verificată axioma suplimentară :

(S.A.F.v.) $\forall \tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{A}}$ implică $S(\tilde{A}) \in \mathfrak{A}$.

unde $S(\tilde{A})$ este suportul mulţimii fuzzy $\tilde{A}$. $(S(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \tilde{A}(x) > 0\}$.

Să considerăm acum o σ – algebră fuzzy $\tilde{\mathfrak{A}}$ şi un spaţiu Banach Y.

1.7. **Definiţie.** Se numeşte măsură vectorială fuzzy $\tilde{\omega}$ pe σ – algebra fuzzy $\tilde{\mathfrak{A}}$ o funcţie $\tilde{\omega} : \tilde{\mathfrak{A}} \to Y$ care satisface următoarele axiome :

(M.V.F.I) Dacă $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathfrak{A}}$, $n = \overline{1, p}$, $\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_{n'} = \tilde{0}$ $n \neq n'$ atunci :

$$\tilde{\omega}\left(\bigcup_{n=1}^{p} \tilde{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{p} \tilde{\omega}(\tilde{A}_n).$$

(M.V.F.II) Dacă $\{A_n\} \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}$ este un şir crescător atunci :

$$\lim_{n \to \infty} \| \tilde{\omega}(\tilde{A}_n) - \tilde{\omega}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right) \| = 0$$

1.8. **Consecinţe.** (*i*) Aceste două condiţii implică faptul că funcţia ω este numărabil aditivă adică $\forall \{\tilde{A}_n\} \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}$, $\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_{n'} = \tilde{0}$, $n \neq n'$, avem :

$$\lim_{m \to \infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} \tilde{\omega}(\tilde{A}_n) - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right) \right\| = 0$$

ceea ce înseamnă că :

$$\tilde{\omega}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\omega}(\tilde{A}_n).$$

(ii) $\tilde{\omega}(\tilde{0}) = 0$.

Dacă se consideră $Y = \tilde{R}$ atunci punem prin definiţie :

1.9. **Definiţie.** Se numeşte măsură reală fuzzy $\tilde{\nu}$ pe σ – algebra fuzzy $\tilde{\mathfrak{A}}$ o funcţie reală $\tilde{\nu} : \tilde{\mathfrak{A}} \to \tilde{R}$ care nu poate lua ambele valori, infinite şi care satisface următoarele condiţii :

(M.R.F.I) $\tilde{\nu}(\tilde{0}) = 0$.

(M.R.F.II) Dacă $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathfrak{A}}$, $n = \overline{1, p}$, $\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_{n'} = \tilde{0}$, $n \neq n'$ atunci :

$$\tilde{\nu}\left(\bigcup_{n=1}^{p} \tilde{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{p} \tilde{\nu}(\tilde{A}_n).$$

(M.R.F.III) Dacă $\{\tilde{A}_n\} \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}$ este un şir crescător atunci

$$\tilde{\nu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right) = \lim_{n \to \infty} \tilde{\nu}(\tilde{A}_n).$$

Analog ca la măsurile vectoriale fuzzy se constată că $\tilde{\nu}$ este numărabil additivă pe $\tilde{\mathcal{A}}$.

Dacă $Y=\tilde{R}_+$, punem prin definiție :

1.10. **Definiție.** Se numește măsură pozitivă fuzzy pe σ – algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ o funcție $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{A}} \to R_+$ care verifică axiomele :

(M.P.F.I) $\exists\, \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca $\tilde{\mu}(\tilde{A}) < +\infty$.

(M.P.F.II). Dacă $\tilde{A}_i \in \tilde{\mathcal{A}}$, $i=1, 2$, $\tilde{A}_1 \subseteq \tilde{A}_2$ atunci :

$$\tilde{\mu}(\tilde{A}_1) \leqslant \tilde{\mu}(\tilde{A}_2).$$

(M.P.F.II). Dacă $\{\tilde{A}_n\} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$, $n=\overline{1, p}$, $\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_{n'} = \tilde{0}$, $n \neq n'$, atunci :

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{p} \tilde{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{p} \tilde{\mu}(\tilde{A}_n).$$

(M.P.F.IV) Dacă $\{\tilde{A}_n\} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$, este un șir crescător atunci :

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}(\tilde{A}_n).$$

1.11. **Consecință.** (i) $\forall\, \{\tilde{A}_n\} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_{n'} = \tilde{0}$, $n \neq n'$ avem

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right) = \sum_{n=1} \tilde{\mu}(\tilde{A}_n).$$

(ii) $\tilde{\mu}(\tilde{0}) = 0$.

Dacă axioma (M.P.F.I) se înlocuiește cu $\tilde{\mu}(\tilde{1}) = 1$ atunci se obține definiția probabilității fuzzy adică :

1.12. **Definiție.** Se numește probabilitate fuzzy pe σ – algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ o funcție $\tilde{P} : \tilde{\mathcal{A}} \to [0, 1]$ care verifică axiomele :

(P.F.I) $\tilde{P}(\tilde{1}) = 1$.

(P.F.II) Dacă $\tilde{A}_i \in \tilde{\mathcal{A}}$, $i=1, 2$, $\tilde{A}_1 \subseteq \tilde{A}_2$ atunci

$$\tilde{P}(\tilde{A}_1) \leqslant \tilde{P}(\tilde{A}_2).$$

(P.F.III) Dacă $\{\tilde{A}_n\} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$, $n=\overline{1, p}$, $\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_{n'} = \tilde{0}$ $n \neq n'$, atunci :

$$\tilde{P}\left(\bigcup_{n=1}^{p} \tilde{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{p} \tilde{P}(\tilde{A}_n).$$

(P.F.IV) Dacă $\{\tilde{A}_n\} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ este un șir crescător atunci

$$\tilde{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \tilde{P}(\tilde{A}_n).$$

1.13. **Observație.** Dacă $\tilde{\mathcal{A}}$ este o σ – algebră de mulțimi uzuale Definiția 1.12 coincide cu definiția probabilității uzuale. Totodată se observă că în general axiomele (P.F.I) – (P.F.IV) nu mai implică substractivitatea probabilității fuzzy.

De exemplu fie $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{A}_\alpha / \tilde{A}_\alpha : \mathbb{R} \to [0, 1],\ \tilde{A}_\alpha(x) = \alpha,\ \alpha \in [0, 1]\}$ și $\tilde{P}_{a, b, c} : \tilde{\mathcal{A}} \to [0, 1]$, $a(c-b) = 1$ $c > b$, $b, c \in (0, 1)$, $c - b < b$ definită astfel:

$$\tilde{P}_{a, b, c}(\tilde{A}\alpha) = \begin{cases} 0 & , \quad \alpha < b. \\ a(\alpha - b) & , \quad b \leqslant \alpha < c. \\ 1 & , \quad \alpha > c. \end{cases}$$

Evident că $\tilde{P}_{a, b, c}$ verifică axiomele (P.F.I) – (P.F.I7) dar nu e substractivă deoarec $\tilde{P}_{a, b, c}(c-b) = 0$ iar $\tilde{P}_{a, b, c}(c) - \tilde{P}_{a, b, c}(b) = 1$.

Aşadar pentru ca această proprietate să fie adevărată trebuie impusă ca axiomă suplimentară:

(P.F.V) Dacă $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{A}_1 \supseteq \tilde{A}_2$ şi $\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 \in \tilde{\mathcal{A}}$ atunci:

$$\tilde{P}(\tilde{A}_1) = \tilde{P}(\tilde{A}_2) + \tilde{P}(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_n).$$

1.14. **Observaţie.** Deoarece pentru mulţimile fuzzy nu are loc $\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k =$ $= \tilde{A}_1 \cup (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1) \cup \ldots \cup \left(\tilde{A}_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} \tilde{A}_j\right) \cup \ldots$ şi deoarece în general familia $\left\{\tilde{A}_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} \tilde{A}_j\right\}_{k=1}^{\infty}$ nu este formată din mulţimi fuzzy disjuncte, nu se poate aplica raţionamentul uzual de demonstrare a proprietăţii de numărabil subaditivitate a probabilităţii fuzzy. Folosindu-se însă un raţionament analog ca în ([3], Lema 4.5)) se poate arăta că pentru σ – algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ ce verifică axioma (S.A.F. IV)şi probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ ce satisface axioma (P.F.V.) dacă $\forall \{\tilde{A}_n\} \supseteq \tilde{\mathcal{A}}$, $\exists \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca $\tilde{A}_n \subset \tilde{B} - \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{A}_n$ $n = 2, 3, \ldots$ atunci $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}}$ şi: $\tilde{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{A}_n)$.

Cum $\tilde{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right) \leqslant \tilde{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right)$ deducem că în condiţiile enunţate:

$$\tilde{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{A}_n).$$

De asemenea este important de remarcat faptul că ipoteza făcută asupra σ – algebrei fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ de a verifica axioma (S.A.F.IV) este esenţială. Pentru a arăta aceasta fie $X = [0, 1]$ şi $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{A}_1, \complement\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \complement\tilde{A}_2\}$ unde $\tilde{A}_1(x) = x$, iar:

$$\tilde{A}_2(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leqslant 1/2. \\ x, & x > 1/2. \end{cases}$$

Prin definiţie vom pune $\tilde{P} : \tilde{\mathcal{A}} \to [0, 1]$ astfel: $\tilde{P}(\tilde{0}) = 0$, $\tilde{P}(\tilde{1}) = 1$, $\tilde{P}(\tilde{A}_r) = \tilde{P}(\complement\tilde{A}_1) = \frac{1}{4}$, $\tilde{P}(\tilde{A}_2) = \frac{2}{3}$ şi $\tilde{P}(\complement\tilde{A}_2) = \frac{1}{8}$.

Se observă că funcţia $\tilde{P}$ astfel definită este o probabilitate fuzzy (trebuie verificată doar monotonia) dar nu e finit subaditivă deorece cu toate că $\tilde{A}_1 \cup \cup \complement\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2$ se obţine $\tilde{P}(\tilde{A}_2) = \frac{2}{3} > \tilde{P}(\tilde{A}_1) + \tilde{P}(\complement\tilde{A}_1) = \frac{1}{2}$.

1.15. **Definiție.** Se numește cîmp borelian de probabilitate fuzzy tripletul ordonat $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ unde $\tilde{\mathcal{A}}$ este o σ–algebră fuzzy iar $\tilde{P}$ probabilitate fuzzy.

1.16. **Teoremă.** Dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

(i) $\tilde{\mathcal{A}}$ este o σ–algebră fuzzy ce satisface axioma (S.A.F.IV) și $\forall\, \tilde{E}, \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{A}}$ rezultă că $|\tilde{E}-\tilde{F}| \in \tilde{\mathcal{A}}$ și $\exists\, \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca $\tilde{E} \subset \tilde{G}-\tilde{F}$.

(ii) Funcția $\tilde{P}: \tilde{\mathcal{A}} \to [0, 1]$ este o probabilitate fuzzy ce satisface axioma (P.F.V).

(iii) Familia $\tilde{\mathcal{C}} = \{\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}}, \ldots\}$ este mulțimea claselor de echivalență determinate astfel:

$$\tilde{E} \sim \tilde{F} \Leftrightarrow \tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{F}|)=0.$$

Atunci cuplul $(\tilde{\mathcal{C}}, \rho)$ este un spațiu metric uzual, unde:

$$\rho(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}}) = \tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{F}|),\ \tilde{E} \in \tilde{\mathcal{E}},\ \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}.$$

Demonstrație. Să arătăm întîi că $\tilde{E} \sim \tilde{F} \Leftrightarrow \tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{F}|)=0$ în condițiile enunțate este o relație de echivalență.

1°. $\tilde{E} \sim \tilde{E}$ deoarece $\tilde{P}(\tilde{\theta})=0$.

2°. $\tilde{E} \sim \tilde{F} \Rightarrow \tilde{F} \sim \tilde{E}$ deoarece $|\tilde{E}-\tilde{F}| = |\tilde{F}-\tilde{E}|$.

3°. $\tilde{E} \sim \tilde{F}$ și $\tilde{F} \sim \tilde{G} \Rightarrow \tilde{E} \sim \tilde{G}$. Din $|\tilde{E}-\tilde{G}| \leqslant |\tilde{E}-\tilde{F}| + |\tilde{F}-\tilde{G}|$ avem că:

$$0 \leqslant \tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{G}|) \leqslant \tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{F}| + |\tilde{F}-\tilde{G}|).$$

Dar:

$$|\tilde{E}-\tilde{F}| + |\tilde{F}-\tilde{G}| = \tilde{H} - ((\tilde{H} - |\tilde{F}-\tilde{G}|) - |\tilde{E}-\tilde{F}|) \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Atunci:

$$\tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{G}|) \leqslant \tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{F}|) + \tilde{P}(|\tilde{F}-\tilde{G}|) = 0$$

Așadar $\tilde{E} \sim \tilde{G}$.

Vom nota cu $\tilde{\mathcal{E}}$ clasa căreia îi aparține elementul $\tilde{E} \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Dacă $\tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{F}|) = 0$ vom scrie, $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{F}}$. Astfel echivalența $\tilde{E} \sim \tilde{F}$ se transformă în egalitatea $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{F}}$ între clase.

Să punem $\rho(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}}) = \tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{F}|),\ \tilde{E} \in \tilde{\mathcal{E}},\ \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Să arătăm că numărul pozitiv $\rho(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}})$ depinde numai de clasele respective $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ și nu de elementele $\tilde{E}$, $\tilde{F}$ luate în aceste clase. Fie $\tilde{E}' \in \tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{F}' \in \tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{E}' \neq \tilde{E}$, $\tilde{F}' \neq \tilde{F}$. Avem:

$$\tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{F}|) \leqslant \tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{E}'|) + \tilde{P}(|\tilde{E}'-\tilde{F}'|) + \tilde{P}(|\tilde{F}'-\tilde{F}|)$$

adică:

$$\tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{F}|) \leqslant \tilde{P}(|\tilde{E}'-\tilde{F}'|).$$

Analog:

$$\tilde{P}(|\tilde{E}'-\tilde{F}'|) \leqslant \tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{F}|)$$

de unde :

$$\tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{F}|)=\tilde{P}(|\tilde{E}'-\tilde{F}'|).$$

Să arătăm că $(\tilde{\mathcal{C}}, \rho)$ este un spațiu metric.

1) $\rho(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}})\geqslant 0$. Dacă $\rho(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}})=0$ atunci $\tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{F}|)=0$ deci $\tilde{E}\sim\tilde{F}$ adică $\tilde{\mathcal{E}}=\tilde{\mathcal{F}}$.

2) $\rho(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}})=\rho(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{E}},)$ evident.

3) $\rho(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{G}})\leqslant\rho(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}})+\rho(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$. Fie $\tilde{E}\in\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{F}\in\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{G}\in\tilde{\mathcal{G}}$.

Atunci axioma rezultă din :

$$\tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{G}|)\leqslant\tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{F}|+|\tilde{F}-\tilde{G}|)=\tilde{P}(|\tilde{E}-\tilde{F}|)+\tilde{P}(|\tilde{F}-\tilde{G}|).$$

1.17, **Propoziție.** Dacă $\{\tilde{F}_n\}\subseteq\tilde{\mathcal{A}}$ atunci :

(i) $\tilde{F}_n\nearrow\tilde{F}$ implică $\tilde{P}(\tilde{F})=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{P}(\tilde{F}_n)$.

(ii) $\tilde{F}_n\searrow\tilde{F}$ și $\tilde{P}$ satisface $(P.F.V)$ implică :

$$\tilde{P}(\tilde{F})=\lim_{n\to\infty}\tilde{P}(\tilde{F}_n).$$

Demonstrație. (i) Rezultă din $\tilde{F}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$ și $(P.F.IV)$.

(ii) Se reduce la cazul precedent deoarece

$$1-\tilde{F}_n\nearrow 1-\tilde{F}.$$

1.18. **Propoziție.** Dacă $\{\tilde{F}_n\}\subseteq\tilde{\mathcal{A}}$ atunci :

(i) $\tilde{P}(\tilde{F}_*)\leqslant\liminf\tilde{P}(\tilde{F}_n)$, unde $\tilde{F}_*=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}\tilde{F}_k$.

(ii) $\tilde{P}$ satisface $(P.V.F.)$ implică $\limsup\tilde{P}(\tilde{F}_n)\leqslant\tilde{P}(\tilde{F}^*)$, unde $\tilde{F}^*=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\tilde{F}_k$.

Demonstrație. (i) $\tilde{P}(\tilde{F}_*)=\tilde{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}\tilde{F}_k\right)=\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}\tilde{F}_k\right)=$

$=\liminf P\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}\tilde{F}_n\right)$. Dar $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}\tilde{F}_k\subseteq\tilde{F}_n$ va implica :

$$\liminf\tilde{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}\tilde{F}_k\right)\leqslant\liminf\tilde{P}(\tilde{F}_n).$$

(ii) $\tilde{P}(\tilde{F}^*)=\tilde{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\tilde{F}_k\right)$. Șirul $\left\{\bigcup\limits_{k=n}^{n}\tilde{F}_k\right\}$ este descrescător și aplicînd Propoziția 1.17 (ii) avem $\tilde{P}(\tilde{F}^*)=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\tilde{F}_k\right)=\limsup\tilde{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\tilde{F}_n\right)$. Dar din $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\tilde{F}_k\supseteq\tilde{F}_n$ deducem $\limsup\tilde{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\tilde{F}_k\right)\geqslant\limsup\tilde{P}(\tilde{F}_n)$.

1.19. **Consecinţă.** Dacă $\{\tilde{F}_n\} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ şi $\tilde{P}$ satisface (P.F.V) atunci :

(i) $\tilde{P}(\tilde{F}_*) \leqslant \liminf \tilde{P}(\tilde{F}_n) \leqslant \limsup \tilde{P}(\tilde{F}_n) \leqslant \tilde{P}(\tilde{F})$.

(ii) $\{\tilde{F}_n\}$ este convergent implică :

$$\tilde{P}(\lim_{n\to\infty} \tilde{F}_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{P}(\tilde{F}_n).$$

1.20. **Propoziţie.** Dacă $\tilde{P}_n : \tilde{\mathcal{A}} \to [0, 1]$, $n \in N$ sînt probabilităţi fuzzy atunci :

(i) $\tilde{P} = \bigvee_{n=1}^{\infty} P_n$ este probabilitate fuzzy dacă $\{\tilde{P}_n\}$ este un şir crescător.

(ii) $\tilde{P}' = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_n$ este o măsură pozitivă fuzzy.

Demonstraţie. (i) Se observă imediat că condiţiile (P.F.I) – (P.F.II) sînt verificate. Fie $\{\tilde{A}_p\}_{p\in N} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ crescător şi $\tilde{A} = \lim_{p\to\infty} \tilde{A}_p$. Atunci :

$$\tilde{P}_n(\tilde{A}) = \lim_{p\to\infty} \tilde{P}_n(\tilde{A}_p) = \bigvee_{p=1}^{\infty} \tilde{P}_n(\tilde{A}_p), \quad \forall n \in N.$$

Deci :

$$\tilde{P}(\tilde{A}) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_n(A) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigvee_{p=1}^{\infty} \tilde{P}_n(\tilde{A}_p) = \bigvee_{p=1}^{\infty} \bigvee_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_n(\tilde{A}_p) =$$

$$= \bigvee_{p=1}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{A}_p) = \lim_{p\to\infty} \tilde{P}(\tilde{A}_p).$$

(ii) Se observă că $\tilde{P}''_p = \sum_{n=1}^{p} \tilde{P}_n$ este o măsură pozitivă fuzzy şi şirul $\{\tilde{P}''_p\}$ este crescător apoi se aplică (i).

BIBLIOGRAFIE

1. Zadeh, L. A., Fuzzy Sets, Inform and Control, 12. Febr. (1968), 99—102.
2. Zadeh, L. A., Probability Measure of Fuzzy Events, Jour. Math. Anal. Appl. 23, (1968), 421—427.
3. Smith, R. E., Measure Theory on Fuzzy Sets, Thesis, Depart. of Math. Univ. of Saskatchewan, Saskatoon, Canada, (1968).
4. Negoiţă, C. V., Ralescu, D. A., Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis, John Wiley Sons, New York Toronto, (1975).
5. Dinculeanu, N., Teoria măsurii şi funcţii reale, Ed. did. şi ped. Bucureşti (1964).
6. Berberian, S. K., Measure and Integration, New York, Londra (1967).
7. Sugeno, M., Theory of Fuzzy Integrals and its Application, Thesis, Doctor of Engineering, Tokyo Inst. of Technology, (1974).

σ – ALGÈBRE ET MESURES FLOUES

RÉSUMÉ

Le travail se propose de présenter une définition générale des σ – algèbres er des mesures floues, tant en étudiant certaines proprietés liées au champ borelienne de probabilité flou ainsi obtenu.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 1—1980**

CONSIDERAŢII TEORETICE GENERALE ASUPRA INSOLATORULUI CU STRUCTURĂ ANTERIOARĂ VARIABILĂ

DE

IOAN LUMINOSU

Problema captării energiei solare, a radiaţiei în general, implică pe lîngă alte aspecte şi pe acela al exploatării maxime a posibilităţilor pe care le aduce un anumit ordin al efectului de seră.

Ne propunem să determinăm expresia temperaturii optime (care de fapt are valoare de diferenţă faţă de mediu) de funcţionare a unui insolator cu ordin oarecare al efectului de seră, precum şi durata de realizare, funcţionarea avînd loc în condiţii idealizate.

Vom considera helioconvertorul echipat cu m respectiv n plăci de sticlă, relaţia între m şi n fiind

$$n=m+1 \tag{1}$$

Variaţia instantanee a temperaturii pentru ordinul n va fi de forma [1].

$$(n)_{T_i}=\frac{AS_i\Phi_i\alpha^n}{C_nS_p}\left(1-e^{-\frac{C_nS_p}{\rho SHc}\cdot(n)\tau_i}\right) \tag{2}$$

notînd

$$\frac{AS_i\Phi_i}{C_nS_p}=a\ ;\ \frac{C_nS_p}{C}=b\ ;\ C=\rho SHc,\ \text{unde}$$

A, S_i, Φ_i, C_n au semnificaţiile cunoscute, relaţia 2 devine

$$(n)_{T_i}=a\,\alpha^n\,(1-e^{-(n)\tau_i\cdot b}) \tag{3}$$

Expresia temperaturii concrete $(n)_{T_1}$ va fi

$$(n)_{T_1}=a\alpha^n\,(1-e^{-(n)\tau_i\cdot\beta}) \tag{4}$$

Logaritmînd relaţia (4) se găseşte expresia duratei

$$(n)_{\tau_1}=\frac{1}{b}\ln\frac{a\alpha^n}{a\alpha^{n-(n)T_1}} \tag{5}$$

Există însă o temperatură optimă $(m)_{T_1}$, pînă la care insolatorul ar funcţiona cu m plăci pe care o va realiza în intervalul

$$(m)_{\tau_1}=\frac{1}{b'}\,ln\,\frac{a'\alpha^m}{a'\alpha^{m-(m)T_1}} \tag{6}$$

unde

$$a' = \frac{AS_i\Phi_i}{C_m S_p}; \quad b' = \frac{C_m S_p}{C}$$

Pînă la $(m)_{T_1}$, insolatorul echipat cu n plăci ar fi consumat intervalul de timp:

$$(n)_{\tau_2} = \frac{1}{b} \ln \frac{a\alpha^n}{a\alpha^{n-(m)_{T_1}}} \tag{7}$$

În succesiunea m, n, durata pentru a realiza $(n)_{T_1}$ va fi:

$$(m, n)_{\tau_3} = (n)_{\tau_1} - (n)_{\tau_2} + (m)_1 \tag{8}$$

Punînd condiția de minim în relația (8) se găsește:

$$(m)_{T_1} = \frac{AS_i\Phi_i\alpha^m(1-\alpha)}{S_p(C_m - C_n)} \tag{9}$$

Relația (9) arată că temperatura optimă a unei stări este favorizată de S_i, Φ_i, α și că micșorarea conductanței stării superioare impune trecerea la o altă stare mai favorabilă.

Din momentul atingerii temperaturii $(m)_{T_1}$ ordinul efectului de seră se va mări cu o unitate devenind $n = m+1$. În această stare insolatorul va funcționa pînă la:

$$(n)_{T_1} \frac{AS_i\Phi_i\alpha^{m+1}(1-\alpha)}{S_p(C_n - C_{n+1})} \tag{10}$$

Ne propunem să determinăm expresia duratei de funcționare în această stare. Se observă pe fig. 1 care arată variația teoretică a temperaturii față de timp [1], că punctul c corespunde temperaturii $(m)_{T_1}$, iar punctul d temperaturii $(n)_{T_1}$, iar durata optimă a stării n este

$$\tau_{st} = \tau_1'' - \tau_1' \tag{11}$$

adică τ_{st} nu depinde de forma și durata drumului pînă în c.

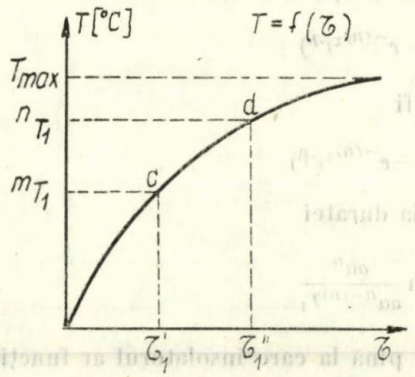


Fig. 1. Dependența teoretică a temperaturii insolatorului funcție de timp.

Aplicînd relația (6) în (11) și logaritmînd se găsește:

$$\tau_{st} = \frac{C}{C_n S_p} \ln \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{C_m\alpha - C_n}{C_n\alpha - C_{n+1}} \cdot \frac{C_n - C_{n-1}}{C_m - C_n} \tag{12}$$

Relația (12) arată că durata stării este dilatată de capacitatea calorică și de diferența dintre conductanța stării și conductanța stării inferioare și micșorată de diferența dintre conductanța stării și conductanța sătării superioare și că temperatura unei stări se realizează cu atît mai repede cu cît sticla transmite mai bine în vizibil.

Pentru un insolator cu ordin oarecare al efectului de seră se pot calcula succesiv temperaturile optime pentru fiecare stare și durata de maximă eficiență asociată stării. Durata totală ce funcționare pînă la temperatura optimă a ultimei stări va fi obținută prin însumarea duratelor particulare.

$$\tau_{st\ tot} = \sum_{i=1}^{n} \tau_{st\ i} + \tau_{st\ 0} \tag{13}$$

$\tau_{st\ 0}$ este durata stării 0 și are expresia

$$\tau_{st\ 0} = \frac{C}{C_0 S_p} \ln \frac{C_0 - C_1}{\alpha C_0 - C_1} \tag{14}$$

Înlocuind în relația (3) pe $\tau_{st\ 0}$ acesta devine

$$\tau_{st\ tot} = \sum_{i=1}^{n} \tau_{st\ i} + \frac{C}{C_0 S_p} \ln \frac{C_0 - C_1}{\alpha\, C_0 - C_1} \tag{15}$$

Deși insolatorul cu structură variabilă este mai eficient decît cel cu structură dată, realizarea practică implică dificultăți create de necesitatea supravegherii permanente fie de personal uman fie de calculator pentru a modifica ordinul efectului de seră la temperatura potrivită a cărei durată de realizare depinde în condiții reale și de condițiile meteo ale zilei.

BIBLIOGRAFIE

1. C. De Sabata, I. Luminosu, „Analiza contribuției efectului de seră simplu și dublu la optimizarea funcționării unui insolator plan", Bul. Șt. și Tehn. al IPT Fasc. 1/1978.

DES CONSIDERATIONS GÉNÉRALES SUR L'INSLOLATEUR AVEC LA STRUCTURE ANTERIEURE VARIABLE

RÉSUMÉ

Dans l'ouvrage on dedui une relation générale pour calculer la température optime attendue par un insolateur equipé avec un nombre quelconque des plaques de verre et une relation pour calculer la durée de l'eficience maxima pour un ordre quelconque donné de l'effet de serre.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 25 (39) Fascicola 1—1980

ARGUMENTE TEORETICE ŞI EXPERIMENTALE PENTRU CONSTRUIREA UNUI INSOLATOR CU STRUCTURĂ ANTERIOARĂ VARIABILĂ

DE
IOAN LUMINOSU

Dependenţa densităţii fluxului util de temperatură (fig. 1) arată că pînă la $\Delta_0 T = 5{,}5$ °C cea mai mare mare densitate o realizează insolatorul fără efect de seră, de la $\Delta_0 T$ pînă la $\Delta_1 T = 22$ °C maximul densităţii revine insolatorului cu efect simplu de seră ; pentru variaţii $\Delta T > \Delta_1 T$ densitatea cea mai mare o realizează insolatorul cu efect dublu. Observaţiile acestea fac plauzibilă ipoteza construirii unui insolator cu structură anterioară variabilă care să introducă un anumit ordin al efectului de seră, pe intervalul de temperatură pentru acel ordin realizează densitatea maximă în raport cu alte ordine. Scopul acestui

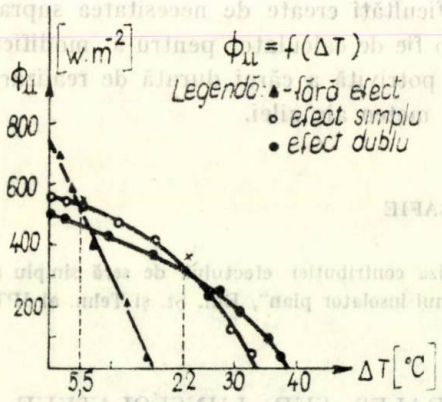


Fig. 1. Dependenţa experimentală de temperatură a densităţii fluxului util avînd ca parametru ordinul efectului de seră.

insolator va fi reducerea timpului de realizare a unei diferenţe ΔT impusă a priori. Vom analiza această ipoteză teoretic, cu ajutorul relaţiilor care descriu variaţiile temperaturilor la insolatorul plan în regim static [1].

$$^{(0)}T_i = {}^{(0)}T_m\,[1 - e^{-k\cdot{}^{(0)}\tau_i}], \text{ pentru insolatorul fără efect de seră} \quad (1)$$

$$^{(1)}T_i = {}^{(1)}T_m\,[1 - e^{-\sigma\cdot{}^{(1)}\tau_i}], \text{ pentru insolatorul cu efect simplu} \quad (2)$$

$$^{(2)}T_i = {}^{(2)}T_m\,[1 - 3^{-\beta\cdot{}^{(2)}\tau_i}], \text{ pentru insolatorul cu efect dublu} \quad (3)$$

unde $^{(0)}T_i$, $^{(1)}T_i$, $^{(2)}T_i$, temperaturi instantanee, considerînd temperatura mediului constantă şi egală cu 0 °C.

$^{(0)}T_m$ — temperatura maximă posibilă la instalatorul fără efect de seră

$^{(0)}T_m \frac{AS_i\Phi_i}{C_0S_p} = 18{,}2\ ^\circ C$ [1]

$^{(1)}T_m$ – temperatura maximă posibilă la insolatorul cu efect simplu

$$^{(1)}T_m = \frac{AS_i\Phi_i\alpha}{C_1S_p} = 36{,}14\ ^\circ C \text{ [1]}$$

$^{(2)}T_m$ – temperatura maximă posibilă la insolatorul cu efect dublu

$$^{(2)}T_m = \frac{AS_i\Phi_i\alpha^2}{C_2S_p} = 45{,}8\ ^\circ C \text{ [1]}$$

A, S_i, Φ_i, C_0, C_1, C_2, S_p, α au semnificaţiile cunoscute [1] iar k, σ, β sînt constante de aparat.

$k = \frac{C_0S_p}{C}$; $\sigma = \frac{S^tC_p}{C}$; $\beta = \frac{C_2S_p}{C}$, cu C – capacitate calorică

Considerăm că dorim să obţinem o temperatură 1_1 cu un insolator echipat cu o placă de sticlă de 4 mm grosime şi ne propunem să determinăm timpul minim de realizare a acestei temperaturi. Vom scrie

$$^{(1)}T_1 = {}^{(1)}T_m[1 - e^{-\sigma \cdot {}^{(1)}\tau_1}] \tag{4}$$

Dezvoltînd relaţia 4, logaritmînd şi înlocuind constantele rezultă:

$$^{(1)}\tau_1 = \frac{C}{C_1S_p} \ln \frac{AS_i\Phi_i\alpha}{AS_i\Phi_i\alpha - {}^{(1)}T_1C_1S_p} \tag{5}$$

$^{(1)}\tau_1$ reprezintă timpul necesar insolatorului echipat de la început cu o placă pentru a realiza $^{(1)}T_1$.

Există însă o temperatură $^{(0)}T_1 < {}^{(1)}T_1$ pînă la care insolatorul ar funcţiona în regim optim fără efect de seră, efectul de seră urmînd a fi introdus de la $^{(0)}T_1$ la $^{(1)}T_1$. Putem scrie:

$$^{(0)}T_1 = {}^{(0)}T_m[1 - e^{-k^{(0)}\tau_1}] \tag{6}$$

Dezvoltînd şi logaritmînd rezultă:

$$^{(0)}\tau_1 = \frac{C}{C_0S_p} \ln \frac{AS_i\Phi_i}{AS_i\Phi_i - {}^{(0)}T_1C_0S_p} \tag{7}$$

Timpul consumat de insolatorul cu efect simplu pentru a realiza $^{(0)}T_1$ ar fi:

$$^{(1)}\tau_2 = \frac{C}{C_1S_p} \ln \frac{AS_i\Phi_i\alpha}{AS_i\Phi_i\alpha - {}^{(0)}T_1C_1S_p} \tag{8}$$

Durata necesară insolatorului, funcţionînd în două regiuni, pentru a realiza $^{(1)}T_1$ va fi

$$^{(1,0)}\tau_3 = {}^{(1)}\tau_1 - {}^{(1)}\tau_2 + {}^{(0)}\tau_1 \tag{9}$$

Punînd condiţia de minim

$$\frac{d^{0,1}\tau_t}{d^{(0)}T_1} = 0,$$

găsim :

$$^{(0)}T_1 = \frac{AS_i\Phi_i(1-\alpha)}{S_p(C_0-C_1)} \tag{10}$$

înlocuind cu valori numerice rezultă $^{(0)}T_1 = 6{,}6$ °C.

Rezultatul este în bună concordanță cu cel experimental și arată că pînă la 6,6 °C insolatorul trebuie să funcționeze fără efect de seră.

Ținînd cont de relațiile 5, 7, 8 și 10, relația 9 devine

$$^{(0,1)}\tau_{min} = \left[\frac{1}{S_p}\ln\frac{1}{C_0-C_1}\cdot\frac{AS_i\Phi_i(\alpha C_0-C_i)}{AS_i\Phi_i\alpha^{(1)}T_1C_1S_p)} + \frac{1}{C_0}\ln\frac{C_0-C_1}{\alpha C_0-C_1}\right] \tag{11}$$

Interesează în condițiile date cîștigul de timp. Impunînd $^{(1)}T_1 = 30°$ găsim cu relațiile (5) și (11) $\Delta^{(10)}\tau = {}^{(1)}\tau_1 - {}^{(0,1)}\tau_{min} = 215$ s.

Pentru găsirea expresiei timpului minim în regimul 0, 1, 2 vom reface raționamentul pentru succesiunea 0, 1, 2 dorind să obținem temperatura $^{(0)}T_1$ în timp minim posibil. Vom scrie :

$$^{(2)}T_1 = {}^{(2)}T_m\left[1-e^{-\beta^{(2)}\tau_1}\right], \text{ cu } {}^{(1)}T_m < {}^{(2)}T_1 < {}^{(2)}T_m \tag{12}$$

După prelucrare obținem pentru timpul consumat în regimul cu efect dublu

$$^{(2)}\tau_1 = \frac{C}{C_2S_p}\ln\frac{AS_i\Phi_i\alpha^2}{AS_i\Phi_i\alpha^2-{}^{(2)}T_1C_2S_p} \tag{13}$$

Există însă o temperatură $^{(1)}T_2$ pînă la care este mai avantajos să se lucreze cu efect simplu

$$^{(1)}T_2 = {}^{(1)}T_m\left[1-e^{-\sigma_0{}^{(1)}\tau_2}\right] \tag{14}$$

de unde rezultă

$$^{(1)}T^2 = \frac{C}{C_1S_p}\ln\frac{AS_i\Phi_i\alpha}{AS_i\Phi_i\alpha-{}^{(1)}T_2\cdot C_1S_p} \tag{14}$$

Pînă la $^{(1)}T_2$ insolatorul echipat cu 2 plăci ar fi consumat :

$$^{(2)}\tau_2 = \frac{C}{C_2S_p}\ln\frac{AS_i\Phi_i\alpha^2}{AS_i\Phi_i\alpha^2-{}^{(1)}T_2\cdot C_2S_p} \tag{15}$$

Durata totală în regimul 1, 2 pentru a realiza $^{(2)}T_1$ ar fi :

$$^{1,2}\tau_3 = {}^{(2)}\tau_1 + {}^{(2)}\tau_2 + {}^{(1)}\tau_3 \tag{16}$$

Punînd în (16) condiția de minim, rezultă pentru $^{(1)}T_2$

$$^{(1)}T_2 = \frac{AS_i\Phi_i\alpha(1-\alpha)}{S_p(C_1-C_2)} \tag{17}$$

Înlocuind cu valori numerice, obținem $^{(1)}T_2 = 21{,}5$ °C.

Ținînd cont de relațiile 14, 15, 17, relația 16 devine

$$^{(1,2)}\tau_{min} = \frac{C}{S_p}\left[\frac{1}{C_2}\ln\frac{1}{C_1-C_2}\cdot\frac{AS_i\Phi_i\alpha(C_1-C_2)}{(AS_i\Phi_i\alpha^2-C_2S_p{}^{(2)}T_1)} + \frac{1}{C_1}\ln\frac{C_1-C_2}{\alpha C_1-C}\right] \tag{18}$$

Impunînd $^{(2)}T_1 = 40$ °C, cîștigul de timp, va fi :

$$\Delta^{(1,2)}\tau = {}^{(2)}\tau_1 - {}^{(1,2)}\tau_{min} = 1404{,}7 \text{ s.}$$

Durata minim necesară pentru a realiza $^{(2)}T_1$ se obține însă în regimul 0, 1, 2. Refăcînd raționamentul anterior, se găsește

$$^{(0,1,2)}\tau_{min\,min} = \frac{C}{S_p}\left[\frac{1}{C_2}\ln\frac{1}{C_1-C}\,\frac{AS_f\Phi_f\alpha\,(\alpha C_1-C_2)}{(AS_f\Phi_f\alpha^2-{}^{(2)}T_1C_2S_p}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{C_1}\ln\frac{(C_1-C_2)(\alpha C_0-C_1)}{\alpha(C_0-C_1)(\alpha C_1-C_2)}+\frac{C_0-C_1}{\alpha C_0-C_1}\right] \qquad (19)$$

Pentru aceeași temperatură $^{(2)}T_1=40°$, obținem :

$$\Delta^{(0,1,2)}\tau={}^{(2)}\tau_1-{}^{(0,1,2)}\tau_{minim}=1\,604\text{ s.}$$

Se propune următorul model de insolator cu structură anterioară variabilă (fig. 2).

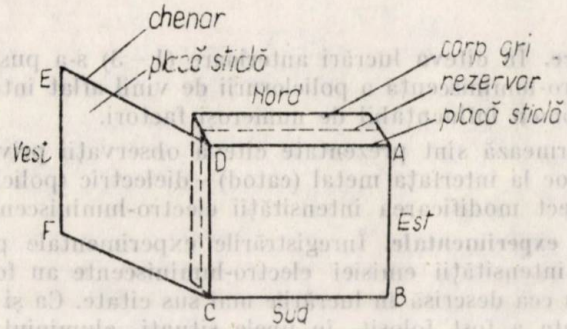


Fig. 2. Structură anterioară variabilă pentru insolator.

ABCD este fața anterioară constînd dintr-un corp gri și o placă de sticlă. *DCEF* este o placă de sticlă introdusă într-un chenar, rotitoare în jurul axului *CD*. Pînă la $^1T_2$ placa CDET este în plan vertical, pe latura de vest a aparatului, continuînd meridianul. De la $^1T_2$ se aduce în plan orizontal peste fața insolatorului.

1. C. De Sabata, I. Luminosu, „Analiza contribuției efectului de seră simplu și dublu la optimizarea funcționării unui insolator plan" ,Bul. Șt. și Tehn. al IPT· Fasc. 1/1978.

DES ARGUMENTS THÉORIQUES POUR LA CONSTRUCTION D'UN INSOLATEUR AVEC STRUCTURE ANTÉRIEURE VARIABLE

RESUMÉ

À partir des observations expérimentales dans l'ouvrage on argumente theorique sur la possibilité de construire un insolateur avec un effet de serre qui serra amplifié simultanément avec l,augmentation de la température.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) Fascicola 1—1980

PROCESE MOLECULARE LA INTERFAŢA METAL-DIELECTRIC ÎN FENOMENUL ELECTRO-LUMINISCENŢEI POLICLORURII DE VINIL

DE

P. CRĂCIUN

1. **Introducere.** În cîteva lucrări anterioare (1—3) s-a pus în evidenţă un fenomen de electro-luminiscenţă a policlorurii de vinil aflat într-un cîmp electric continu, fenomen influenţabil de numeroşi factori.

În cele ce urmează sînt prezentate cîteva observaţii privitoare la unele procese care au loc la interfaţa metal (catod)—dielectric (policlorura de vinil) şi care au ca efect modificarea intensităţii electro-luminiscenţei. —

2. **Rezultate experimentale.** Înregistrările experimentale privind modificarea în timp a intensităţii emisiei electro-luminiscente au fost făcute cu o celulă similară cu cea descrisă în lucrările mai sus citate. Ca şi catod a celulei electro-luminiscente a fost folosit, în unele situaţi, aluminiul iar în altele, platina. Ambele metale erau în prealabil curăţite prin abraziune pe pînză aspră de bumbac, astfel încît abraziunea viza mai mult îndepărtarea stratului superficial de oxid al electrodului.

Folia de policlorură de vinil, de grosime d=0,17 mm, era transparentă şi de provenienţă tehnică. Ea era înlocuită cu o folie nouă de fiecare dată cînd se schimba electrodul sau tehnica prelucrării suprafeţei acestuia. Tensiunea continuă aplicată pe suprafeţele foliei a fost de 2 KV în toate cazurile.

Intensitatea luminoasă, emisă de celula a cărui catod de aluminiu a fost prelucrat prin frecare pe o pînză uscată din bumbac, scade în timp, la început mai abrupt, apoi mai lent (fig. 1 *a*). După o pauză de 24 ore sau şi mai puţin intensitatea electro-luminiscenţei se regenerează dar nu v-a atinge valoarea iniţială obţinută în emisia precedentă (fig. 1 *b*, *c*). După un interval mai mare de folosinţă, intensitatea electro-luminiscentă tinde spre o valoare care rămîne aproape constantă în timp (fig. 1 *c*).

Nu la fel se modifică intensitatea emisiei produsă într-o celulă electro-luminiscentă a cărui catod este din platină prelucrată şi el, identic ca şi electrodul de aluminiu. Aici intensitatea iniţială a electro-luminiscenţei se modifică mult mai lent în timp, astfel încît în primele 30 minute ea poate fi aproximată ca rămînînd constantă (fig. 2 *a*).

După suprimarea tensiunii pe o astfel de celulă timp de cîteva ore, electro-luminiscenţa devine mai intensă faţă de emisia precedentă cu cca 30—40%. Noua emisie scade însă mai lent în timp (fig. 2 *b*) în comparaţie cu celula cu electrodul din aluminiu.

După repetarea în continuare a suprimării mai multe ore a tensiunii pe celulă, nu s-a mai obţinut, la reluarea tensiunii, o emisie de intensitate superioară celei precedente ci dinpotrivă, o emisie diminuată care în continuare,

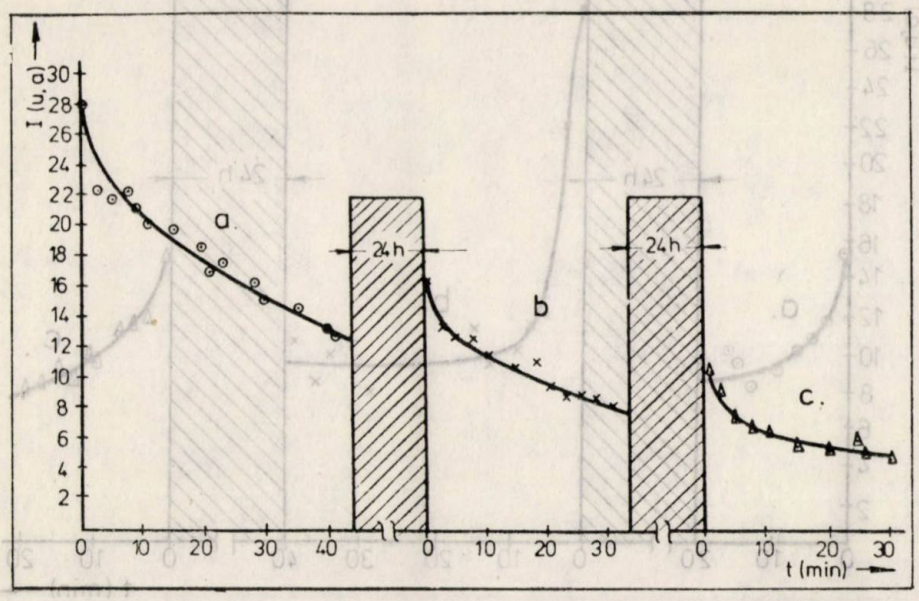


Fig. 1. Evoluţia în timp a intensităţii electro-luminiscenţei P.V.C. în urma prelucrării catodului de aluminiu : a) imediat după prelucrare; b, c) după 24 ore de inactivitate de la ultima înregistrare.

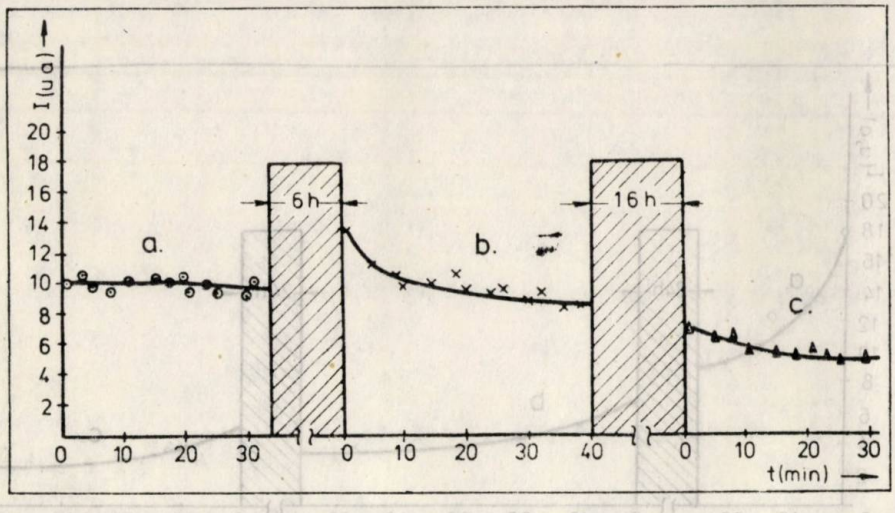


Fig. 2. Evoluţia în timp a electro-luminiscenţei P.V.C. după prelucrarea catodului de platină : a) imediat după prelucrare; b, c) după 6 ore, respectiv 18 ore de la ultima înregistrare.

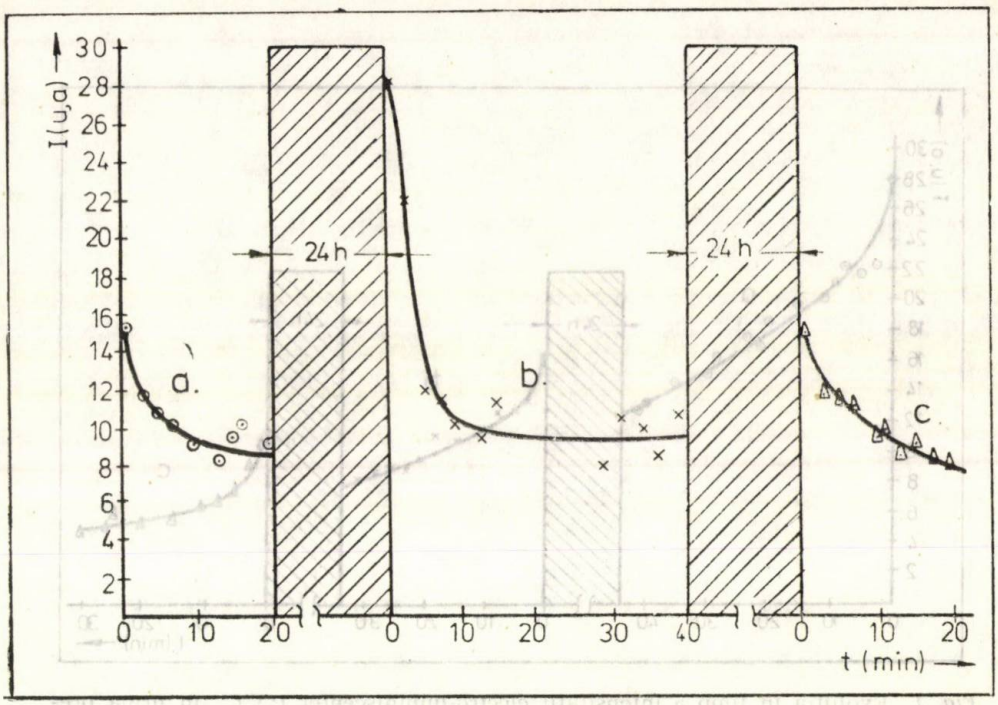


Fig. 3. Evoluția în timp a intensității electro-luminiscenței P.V.C. sub influența urmelor de alcool adsorbit la suprafața catodului de Al prelucrat: a) imediat după prelucrare; b, c) după 24 ore de la ultimele inregistrări.

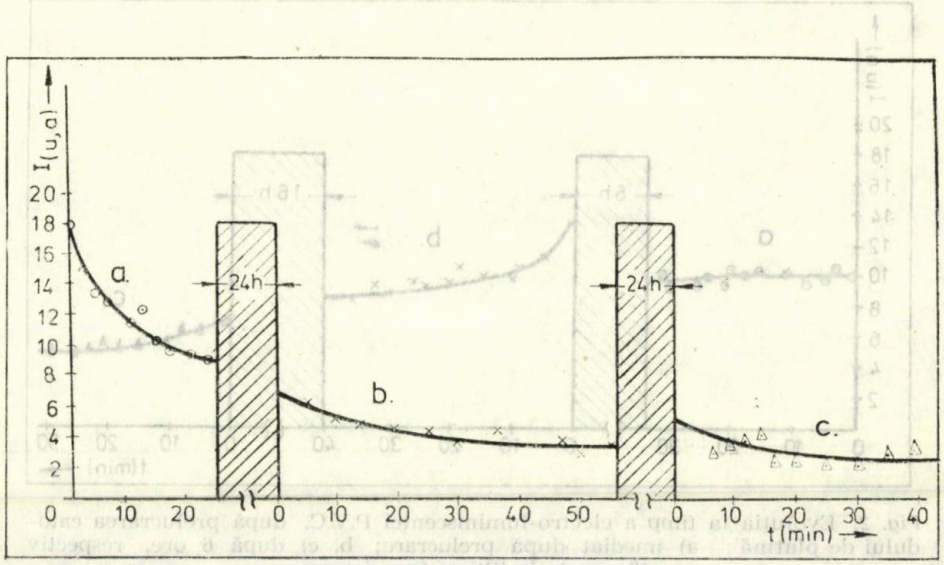


Fig. 4. Dependența intensității electro-luminiscenței de timpul de utilizare a P.V.C.: a) emisia unei folii noi; b, c) emisia după o uzură de 30, respectiv 90 minute a foliei P.V.C.

scade lent tinzînd spre o viteză de descreştere în timp a intensităţii apropiată de zero (fig. 2 *c*).

Alura curbei de variaţie în timp a intensităţii electro-luminiscenţei emisă de celula cu catodul de platină (fig. 2 *b*) nu este întîlnită la emisia celulei cu electrod de aluminiu decît în cazul special în care electrodul este abrazat într-un mediu umed cu alcool sau spălat cu alcool în urma abraziunii şi uscat liber în aer. În acest caz, intensitatea electro-luminscenţei manifestă în primele 15—20 minute o tendinţă de scădere în timp după care punctele înregistrării suferă abateri neregulate în sensul creşterii (fig. 3 *a*).

După o pauză de 24 ore celula electro-luminiscentă emite cu o intensitate mărită, cu cca 80% peste intensitatea maximă anterioară (fig. 3 *b*). După încă 24 de ore de inactivitate a celulei intensitatea încă rămîne mare fiind comparabilă cu prima emisie înregistrată. (fig. 3 *c*, *a*).

Electro-luminiscenţa celulelor a căror catod n-a suferit în prealabil nici o prelucrare sau a fost mai îndelung folosit, evoluează în timp într-un mod diferit în comparaţie cu cazurile prezentate mai sus. Intensitatea electro-luminiscenţei scade continuu în timp indiferent de lungimea pauzei de suprimare a tensiunii pe celulă. Intensitatea electro-luminiscenţei nu depinde sensibil de timpul de suprimare a tensiunii celulei dar depinde de timpul de utilizare a foliei de policlorură de vinil. În cazul foliei noastre, de provenienţă tehnică, intensitatea electro-luminiscenţei a devenit aproape constantă după cca 60 minute de utilizare (fig. 4 *a*, *b*, *c*).

3. **Interpretări.** Conform observaţiilor făcute în altă parte (3) că intensitatea luminoasă este mai mare în apropierea catodului, s-a tras concluzia că electro-luminiscenţa policlorurii de vinil este printre altele, şi un efect al bombardării ei cu electroni emişi la interfaţa metal (catod)—policlorură de vinil.

Plecînd de la această premiză se poate explica cu relativă uşurinţă evoluţia curbelor de electro-luminiscenţă din fig. 1 şi 2 folosind teoriile emisie exo-electronice (4—6).

Centrele exo-electronice sînt localizate în defectele din stratul de oxid de la suprafaţa electrodului metalic. În aceste centre electronii au energia de extracţie cu cca 1 eV mai mică ca electronii metalului de bază. Este normal deci, ca la o stimulare corespunzătoare să fie emişi din catod, într-un mod statistic mai întîi, exo-electronii.

În condiţiile prezenţei unui cîmp electric extern, viteza de golire a centrelor exo-electronice fiind mai mare ca viteza de populare a lor cu electroni de la metalul de bază, va rezulta o scădere în timp şi a emisiei exo-electronice stimulatoare a emisiei luminiscente (fig. 1 *a*).

În condiţiile lipsei unui cîmp electric extern, numărul electronilor care părăsesc centrele exo-electronice este mult mai mic ca cel al electronilor care repopulează centrele migrînd de la metalul de bază. Rezultă că în timp, în lipsa oricărui stimulent extern, centrele exo-electronice se regenerează (7) şi odată cu ele capacitatea de electro-luminiscenţă a celulei (fig. 1 *b*, *c*).

Procesul descris mai sus este mai uşor de pus în evidenţă la metalele oxidabile cum este aluminiul şi mai puţin pronunţat la metalele greu oxidabile sau nobile, cum este şi cazul platinei. În acest din urmă caz, la suprfaţa metalului, după abraziune, trebuie să existe un strat fin, monoatomic sau centre răslețe de oxid cu număr proporţional de defecte, deci de centre exo-electronice. Acestea, din cauza grosimii foarte mici a stratului de oxid pot fi populate

mai ușor cu electroni ai metalului de bază astfel încît, în cazul emisiei exo-electronice, raportul dintre numărul electronilor care populează centrele și numărul electronilor care le părăsesc să rămînă foarte apropiat de unitate. În acest caz și intensitatea electro-luminiscenței se va modifica mult mai lent în comparație cu metalele cu strat gros de oxid (a se compara fig. 1 *a* cu 2 *a*).

Întrucît viteza de oxidare a platinei este incomparabil mai mică față de a aluminiului, va rezulta că și numărul centrelor exo-electronice de la suprafața platinei va crește foarte încet în timp. Așa cum se poate constata din fig. 2 *b*, de abea după 6 ore stratul de oxid de la suprafața platinei, deci și numărul centrelor exo-electronice, crește apreciabil, fiind și cauza unei electro-luminiscențe sporite față de emisia anterioară (fig. 2 *a*, *b*).

Platina fiind un metal puternic electropozitiv, popularea cu electroni a centrelor exo-electronice din stratul de oxid în creștere este mai îngreunată ca în cazul stratului mono atomic de oxid. În consecință, în timp centrele exo-electronice superficiale se depopulează lent de electroni și ca efect scade și emisia electro-luminiscentă (fig. 2 *b*, *c*).

Cînd în timpul sau la sfîrșitul prelucrării electrodul se spală cu alcool sau apă, evoluția în timp a electro-luminiscenței este complicată de un fenomen de adsorbție al alcoolului (apei) în profunzimea stratului de oxid metalic. La început sub influența cîmpului electric extern folia de policlorură de vinil este bombardată în majoritate, cu electroni emiși de centrele exo-electronice superficiale. Între timp, moleculele polare de alcool difuzează spre suprafața oxidului unde încep să formeze un strat de adsorbție superficial, micșorînd așa cum este știut (8), energia de extracție a electronilor din metal cît și din centrele exo-electronice În consecință numărul electronilor bombardanți crește și odată cu el intensitatea electro-luminiscenței (sfîrșitul curbei a fig. 3).

După 24 sau mai multe ore de inactivitate a celulei, este de așteptat ca pelicula de alcool difuzată la suprafața stratului de oxid să devină mai compactă, acoperînd o suprafață mai mare iar în consecință, intensitatea electro-luminiscenței să crească mult (fig. 3 *b*, *c*).

În procesul electro-luminiscenței bombardamentul electronic de la interfața oxid-policlorură de vinil, duce foarte probabil, prin procese secundare la o distrugere a moleculelor de alcool adsorbite superficial. Cîmpul autoelectric creat de stratul adsorbit se diminuează astfel și odată cu el și intensitatea electro-luminiscenței (fig. 3 *c*).

În cazul electrozilor vechi sau neprelucrați este plauzibil să se considere că există un echilibru dinamic între electronii care părăsesc centrele lor și cei care populează aceste centre, venind de la metalul de bază. În acest caz electro-luminiscența ar trebui să tindă spre o valoare constantă în timp. Această tendință poate fi constatată de altfel în toate porțiunile finale ale curbelor de electro-luminiscență (fig. 1 *c*, 2 *c*, 3 *c*).

Folosind o celulă electro-luminiscentă formată dintr-o folie nouă de policlorură și un electrod vechi ar trebui, conform considerațiilor de mai sus, să se obțină o electro-luminiscență de intensitate constantă. În realitate, așa cum se poate constata și din fig. 4 pentru curbele ridicate cu o celulă electro-luminiscență cu electrod de aluminiu, intensitatea luminiscenței scade tinzînd cu timpul spre o valoare constantă. Acest lucru denotă că în procesele electro-luminiscenței, un rol important îl are și modificările survenite în folia de policlorură de vinil.

Evoluția curbelor din fig. 4 ar putea fi explicată ținînd cont de constatarea anterioară (2) că intensitatea electro-luminiscenței crește cu concentrația de plastifiant din structura policlorurii de vinil, tinzînd spre o valoare maximă în jurul unui anumit procent de plastifiant, pentru fiecare tip de plastifiant folosit.

În fig. 4 intensitatea luminiscenței scăzînd în timp va rezulta, conform afirmațiilor de mai sus, că în timpul electro-luminiscenței scade concentrația de plastifiant din masa plastică.

4. **Concluzii.** Din discuțiile de mai sus, privitor la electro-luminiscența policlorurii de vinil se pot rezuma următoarele :

1. Intensitatea electro-luminiscenței este influențată de fenomene secundare care au loc în stratul de oxid de la interfața metal-dielectric (P.V.C.) ;

2. Intensitatea este influențată în anumite limite de electrodul (catodul) celulei electro-luminiscente prin intermediul stratului de oxid superficial ;

3. În timpul electro-luminiscenței are loc o modificare a procentului de plastifiant din masa P.V.C.

Aceste concluzii ar putea constitui premizele unor metode de investigare în domenii speciale cum sînt : a) cinetica oxidării superficiale ale metalelor : b) procesele de adsorbție-desorbție în suprafețele poroase ; c) analiza rapidă a compoziției P.V.C. în procesele tehnologice de fabricație.

BIBLIOGRAFIE

1. Crăciun P., Anal. Univ. (Timișoara)., **13**, 29 (1975).
2. Crăciun P., Bull. Șt. Teh. (I.P.T.), **21**, 147 (1976).
3. Crăciun P., Bull. Șt. Tehn. (I.P.T.)., **22**, 368 (1977).
4. Kramer J., Phys., **135**, 25 (1953).
5. Scharmann A., Seibert G., Z. Phys., **183**, 249 (1965).
6. Brotzen F. R., Phys. Stat. Sol., **22**, 9 (1967).
7. Crăciun P., Phys, stat. sol., **10 (a)**, 175 (1972).
8. Linke E., Meyer K., Surface Sci., **8**, 313 (1967).

PROCÈSES MOLÈCULAIRES A L'INTERFACE MÈTAL-DIELÈCTRIQUE DANS LE PHÈNOMÈNE D'ÈLECTROLUMINISCENCE DU POLYCHLORURE DE VINYLE

RÉSUMÉ

On évidentie la dependence d'émission électroluminiscente par les impuretées de l'interface métal-polychlorure de vinyle.

L'interprétation est faite d'après la théorie des centres exo-éléctroniques.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

I.P.B.T. — 1028/1981.

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIȘOARA

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) Fascicola 2

IULIE—DECEMBRIE
1980

COLEGIUL DE REDACȚIE

Acad. prof. dr. doc. ing. IOAN ANTON, Conf. dr. ing. GHEORGHE CREȚU, Prof. em. dr. doc. ing. GHEORGHE SILAȘ — redactor șef, Prof. em. ing. CONSTANTIN AVRAM, m.c. al Acad. R.S.R., Prof. dr. ing. DUMITRU BECHERESCU, Prof. dr. ing. VASILE COCHECI, Prof. dr. BORISLAV CRSTICI, Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA, Prof. dr. ing. TOMA DORDEA, Conf. dr. ing. TRAIAN NICOARĂ, Prof. dr. ing. FRANCISC KOVACS, Acad. prof. dr. ing. DAN MATEESCU, Prof. dr. ing. TIBERIU MUREȘAN, Conf. dr. ing. IOAN NIȚĂ, Prof. em. dr. ing. GHEORGHE SAVII, Prof. dr. doc. ing. CONSTANTIN ȘORA, Prof. dr. ing. LIVIU BRÎNDEU — secretar de colegiu

COMITETUL DE REDACȚIE

I. Matematică-Fizică

— Prof. dr. BORISLAV CRSTICI — redactor responsabil
— Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA
— Prof. dr. ing. MARIUS BORNEAS — redactor responsabil adj.
— Prof. dr. OCTAV E. GHEORGHIU
— Conf. dr. EUGEN BURLACU — secretar de redacție

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA“ TIMIȘOARA

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 2** **iulie—decembrie 1980**

SUMAR

1. E. ROVENTA — Teoreme de reprezentare pentru probabilități fuzzy 5

2. E. ROVENTA — Probabilități fuzzy regulate 13

3. P. N. IZVERCIAN — Funcții primare pe algebre polinomiale semisimple 23

4. T. BANZARU — Proximități pe spațiul părților 27

5. N. BOJA, GEORGETA BRĂILOIU — Despre conjugarea K-spațiilor prin forme sesquiliniare 33

6. C. MILICI, L. VUC, N. RACHIN — Asupra ecuației integrale 37

$$\int_{\beta(x)}^{x} Z(x, y)\ g(y)\,dy = q(x)$$

7. C. MILICI, N. RACHIN — Asupra structurilor formulelor calculului propozițional definit cu $(V, \urcorner)$ 43

8. E. BURLACU, P. NASLAU — Asupra unei formule de cubatură 45

9. E. BURLACU, P. NASLAU — Asupra unor ecuații matriciale circulare booleene 49

10. P. NASLAU — O metodă asimptotică pentru un sistem ciclic de ecuații integro-diferențiale 53

11. N. CRIVAT — Funcții p^* continue 57

12. F. RADU — Fibrate vectoriale diferențiabile compatibile cu baza fibratului 61

13. CARMENCITA UROSU — Asupra produselor filtrate de congruențe .. 63

14. V. T. DOROBANȚU — Aspecte de statistică cuantică în ciocniri periferice 67

15. COLETA DE SABATA — Considerații teoretice asupra alegerii dimensiunilor unui concentrator solar cilindric destinat utilizărilor industriale 71

16. COLETA DE SABATA, AURICA MUNTEANU, C. MARCU, DOROTHEA MIHAILOVICI, MARIA BOLDAN — Cercetări experimentale asupra unor aliaje feromagnetice de Ni—Fe—Mo 72

17. COLETA DE SABATA, I. LUMINOSU — Cercetrri experimentale și considerații teoretice asupra utilizării unor folii de climatizare 83

BULETIN SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
DE
L'INSTITUT POLYTECHNIQUE „TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA

MATHEMATIQUE—PHYSIQUE

Tome 25 (39) **Fascicule 1** **Julie-Decembre 1980**

SOMMAIRE

1. E. ROVENTA — Théorèmes de reprezéntation pour les probabilités floues 5

2. E. ROVENTA — Probabilités floues régulières 13

3. P. N. IZVERCIAN — Primary functions on semisimple polinomial algebras 23

4. T. BANZARU — Proximites on the space of subsets 27

5. N. BOJA, GEORGETA BRĂILOIU — On the conjugation of k-spaces trough sesquiliniear forms 33

6. C. MILICI, L. VUC, N. RACHIN — On the integral ecuation 37

$$\int_{\beta(x)}^{x} Z(x, y)\, g(y)\, dy = q(x)$$

7. C. MILICI, N. RACHIN — On the structura of formulas in propositional calcules definies evitle $(V, \urcorner)$ 43

8. E. BURLACU, P. NASLAU — On a cubature formula 45

9. BURLACU, P. NASLAU — Sur quelques équations matricielles circulaires booléenes 49

10. P. NASLAU — Une méthode asymptotique pour un systeme cyclique d'équations intégro-différentielles 53

11. N. CRIVĂŢ — p^* — continuous functions 57

12. F. RADU — Fibrés vectoriels différentiables compatibles avec la basse of fibré 61

13. CARMENCITA UROSU — Sur les produits filtres des congruences 63

14. V. T. DOROBANŢU — Quantum — Statistical aspects in peripheral collisions 67

15. COLETA DE SABATA — Considérations théoriques concernand les dimensions convenables pour un concentrateur solaire cyllindrique destiné à l'utilisation industrièlle 71

16. COLETA DE SABATA, AURICA MUNTEANU, C. MARCU, DOROTHEA MIHAILOVICI, MARIA BOLDAN — Expreimentelle Untersuchungen der elektrolytisch niedergeschlagenen Ni—Fe—Mo Schichten 72

17. COLETA DE SABATA, I. LUMINOSU — Des recherches experimentalles et considerations théoriques concernant les couches minces de climatisaton 83

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 2 —1980**

TEOREME DE REPREZENTARE PENTRU PROBABILITĂŢI FUZZY

DE

EUGEN ROVENŢA

Pornind de la importanţa teoremelor de reprezentare a probabilităţilor absolut continue uzuale ne propunem ca în acestă lucrare să prezentăm demonstraţii diferite pentru o serie de teoreme de structură pentru probabilităţi fuzzy, abordate în [1] pentru măsuri pozitive fuzzy.

Dintre acestea cea mai importantă este o teoremă de reprezentare care generalizează teorema lui Lebesgue-Radon-Nikodym [2] conform căreia în anumite condiţii orice măsură reală ν absolut continuă prin raport cu măsura μ este o integrală nedefinită. Tehnologia şi notaţiile sînt din [3].

Fie $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ un cîmp de probabilitate fuzzy cu nucleul $\mathcal{N}$ şi $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}(X)$, astfel încît pentru $\forall \alpha \in [0, 1]$, $\tilde{F}^{\alpha} \in \mathcal{N}$ (pentru simplitate vom nota cu $\tilde{\mathcal{M}}(X, \mathcal{N})$ mulţimea acestor $\tilde{F}$).

În cele ce urmează vom considera definiţia integralei după [4]. Pentru aceasta fie şirul finit de numere reale $0=r_0<r_1<\ldots<r_n=1$. Introducînd notaţiile $A_k=\{x \in X \mid r_{k-1} \leqslant \tilde{F}(x)<r_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $A_n=\{x \in X \mid r_{n-1} \leqslant \tilde{F}(x) \leqslant 1\}$ se observă că $X=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ şi că am obţinut o partiţie a lui X cu mulţimi din $\mathcal{N}$ pe care o notăm cu $d=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Clasa partiţiilor astfel obţinute determinate de F se va nota cu $\mathcal{D}_{\tilde{F}}$. Atunci :

$$\int \tilde{F}\, d\tilde{P}=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n} r_{k-1}\, \tilde{P}|_{\mathcal{N}}(A_k),\ d \in \mathcal{D}_{\tilde{F}}\right\}.$$

1.1. **Teorema.** Fie $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ un cîmp de probabilitate fuzzy cu nucleul $\mathcal{N}$ astfel ca :

(i) $\tilde{P}$ satisface (P.F.—V).

(ii) $\tilde{\mathcal{A}}=\{\tilde{A} : X \to [0, 1] \mid \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{M}}(X, \mathcal{N})\}$.

Atunci :

$$\tilde{P}(\tilde{A}) = \int \tilde{A}\, d\tilde{P}|_{\mathcal{N}},\ \forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

unde $\tilde{P}|_{\mathcal{N}}$ este restricţia probabilităţii fuzzy $\tilde{P}$ la nucleul $\mathcal{N}$ al σ-algebrei fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$.

Demonstraţie. Se va face în mai multe etape, ştiind din [1] că $\forall r \in [0, 1]$, $\tilde{P}(r)=r\tilde{P}(\tilde{1})$ dacă este satisfăcută ipoteza (i)

(a) Dacă $\tilde{A}(x)=r$, $x \in X$ atunci :

$$\int \tilde{A}\, d\tilde{P}|_{\mathfrak{K}} = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} r_{k-1}\, \tilde{P}|_{\mathfrak{K}}(A_k)\right\} = r\tilde{P}|_{\mathfrak{K}}(\tilde{1}) = r\tilde{P}(\tilde{1}) = \tilde{P}(\tilde{A}).$$

b) Dacă $\tilde{A}(x)=rB(x)$, $B \in \mathcal{N}$ atunci se arată întîi că $P_B(\tilde{A})=\tilde{P}(\tilde{A} \cap B)$ este o măsură pozitivă fuzzy care satisface $(P.F.V)$ Apoi se obţine :

$$\tilde{P}(\tilde{A}) = \tilde{P}(r \cdot B) = \tilde{P}_B(r) = r\tilde{P}_B(\tilde{1}) = r\tilde{P}(\tilde{B}) = r\tilde{P}|_{\mathfrak{K}}(B) =$$
$$= r\int B\, d\tilde{P}|_{\mathfrak{K}} = \int \tilde{A}\, d\tilde{P}|_{\mathfrak{K}}.$$

c) Dacă $\tilde{A}$ este $\mathcal{N}$-măsurabilă atunci :

$$\int \tilde{A}\, d\tilde{P}|_{\mathfrak{K}} = \sup_{d \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}}\left\{\sum_{k=1}^{n} r_{k-1}\, \tilde{P}|_{\mathfrak{K}}(A_k)\right\}.$$

Fie mulţimile fuzzy $\tilde{B}_k$, $k=\overline{1,\ n}$ definite astfel :

$$\tilde{B}_k(x) = \begin{cases} r_{k-1}, & x \in A_k \\ 0, & x \in A_k \end{cases} = r_{k-1} A_k.$$

Atunci conform punctului b) avem :

$$P(\tilde{B}_k) = \int \tilde{B}_k\, d\tilde{P}|_{\mathfrak{K}} = r_{k-1}\, \tilde{P}|_{\mathfrak{K}}(A_k).$$

Prin urmare :

$$\int \tilde{A}\, d\tilde{P}|_{\mathfrak{K}} = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \tilde{P}(\tilde{B}_k)\right\} = \sup_{d \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}} \tilde{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \tilde{B}_k\right) = \sup_{d \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}} \tilde{P}(\tilde{A}_d) = \tilde{P}\left(\bigcup_{d \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}} \tilde{A}_d\right)$$

Cum $\tilde{A}_d$ sînt funcţii pe care le putem aranja crescător şi $\bigcup_{d \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}} \tilde{A}_d = \tilde{A}$ se obţine :

$$\int \tilde{A}\, d\tilde{P}|_{\mathfrak{K}} = \tilde{P}(\tilde{A}).$$

Dacă $\tilde{P} : \tilde{\mathcal{A}} \to [0, 1]$ este o probabilitate fuzzy dată şi $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ se defineşte funcţia $\tilde{P}_{\tilde{A}} : \tilde{\mathcal{A}} \to [0, 1]$ astfel $\tilde{P}_{\tilde{A}}(\tilde{B}) = \tilde{P}(\tilde{A} \cap \tilde{B})$, $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}}$. Evident această funcţie este o măsură pozitivă fuzzy. De asemenea prin $\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{K}}$ se înţelege restricţia acestei măsuri fuzzy la nucleul $\mathcal{N}$ şi vom avea :

$$\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{K}}(E) = \tilde{P}(\tilde{A} \cap E) \text{ pentru } E \in \mathcal{N},$$

care este la rîndul ei o măsură pozitivă fuzzy.

1.2. **Lema.** Fie $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ un cîmp de probabilitate fuzzy cu nucleul $\mathcal{N}$ $B \in \mathcal{N}$, $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ şi g o funcţie nenegativă $\mathcal{N}$-măsurabilă. Atunci :

$$\int Bg\, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{K}} = \int g\, d\tilde{P}_{\tilde{A} \cap B|\mathfrak{K}}$$

Demonstrație. Dacă considerăm mulțimile $C_k=\{x\in X/r_{k-1}\leqslant Bg(x)<r_k\}$ și $D_k=\{x\in X \mid r_{k-1}\leqslant g(x)<r_k\}$ se observă că $C_k=D_k\cdot B$. Dar prin definiție:

$$\int Bg\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\sup_{d\in\mathcal{D}_{Bg}}\left\{\sum_{k=1}^{n} r_{k-1}\,P_{\tilde{A}}(C_k)\right\}$$

și

$$\int g d\tilde{P}_{\tilde{A}\cap B|\mathfrak{R}}=\sup_{d\in\mathcal{D}_g}\left\{\sum_{k=1}^{n} r_{k-1}\,\tilde{P}_{\tilde{A}\cap B}(D_k)\right\}$$

Cum însă :

$$\sum_{k=1}^{n} r_{k-1}\,\tilde{P}_{\tilde{A}}(C_k)=\sum_{k=1}^{n} r_{k-1}\,\tilde{P}_{\tilde{A}}(D_k\cap B)$$

demonstrația este terminată.

1.3. **Teoremă.** Fie $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ un cîmp de probabilitate fuzzy cu nucleul $\mathcal{M}$ astfel ca :

(i) $\tilde{P}$ satisface (P.F.V).

(ii) $\tilde{\mathcal{A}}=\{\tilde{A}: X\to[0,1] \mid \tilde{A}\in\tilde{\mathcal{M}}(X,\mathcal{M})\}$

Atunci oricare ar fi funcția $\mathcal{M}$-măsurabilă h și $\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{A}}$ avem :

$$\int h\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\int \tilde{A}h\,\mathrm{d}\tilde{P}_{|\mathfrak{R}}.$$

Demonstrație. Se va face în mai multe etape.

a) Dacă $h=\sum_{i=1}^{n} b_iB_i$, $B_i\in\mathcal{M}$ atunci :

$$\int h\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\int\sum_{i=1}^{n} b_iB_i\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\sum_{i=1}^{n} b_i\int B_i\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}$$

Ținîndu-se cont de Lema 1.2 și de Teorema 1.1 se obține :

$$\int h\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\sum_{i=1}^{n} b_i\int\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}\cap B_i|\mathfrak{R}}=\sum_{i=1}^{n} b_i\tilde{P}_{\tilde{A}\cap B_i}(\tilde{1})=\sum_{i=1}^{n} b_i\,\tilde{P}(\tilde{A}\cap B_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} b_i\int\tilde{A}\cap B_i\,\mathrm{d}\tilde{P}_{|\mathfrak{R}}=\int\tilde{A}h\,\mathrm{d}\tilde{P}_{|\mathfrak{R}}.$$

b) Dacă $h\geqslant 0$ se știe că $\exists\,\{h_n\}$ etajate $h_n\nearrow h$; așadar :

$$\int h\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\lim_{n\to\infty}\int h_n\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\lim_{n\to\infty}\int\tilde{A}h_n\,\mathrm{d}\tilde{P}_{|\mathfrak{R}}=\int\tilde{A}h\,\mathrm{d}\tilde{P}_{|\mathfrak{R}}.$$

c) Dacă h este arbitrară atunci $h=h^+-h^-$ și se reduce la cazul precedent.

Fie $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ un cîmp borelian de probabilitate fuzzy și $p:\tilde{\mathcal{A}}\to[0,1]$ o altă probabilitate fuzzy. Se știe că $\tilde{P}'$ este absolut continuă prin raport cu $\tilde{P}$ (și se va nota cu $\tilde{P}'\ll\tilde{P}$) dacă și numai dacă $\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{A}}$ și $\tilde{P}(\tilde{A})=0$ implică $\tilde{P}'(\tilde{A})=0$. De asemenea se spune că, $\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{A}}$ este mulțime fuzzy pozitivă pentru măsura fuzzy reală $\tilde{\nu}$ dacă $\forall\,\tilde{B}\in\tilde{\mathcal{A}}$ are loc relația $\tilde{\nu}(\tilde{B}\cap\tilde{A})\geqslant 0$.

1.4. **Lemă.** Dacă $\tilde{P}'$ și $\tilde{P}$ sînt probabilități fuzzy ce satisfac condiția (P.F.V), definite pe σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ cu nucleul $\mathcal{N}$ ce satisface condițiile (S.A.F. IV) și (S.A.F.V) astfel ca $\tilde{P}' \ll \tilde{P}$ și dacă $\tilde{P}'$ nu este identic nulă atunci există un număr pozitiv ε .și o mulțime $E \in \mathcal{N}$ astfel ca $\tilde{P}_{|\mathfrak{R}}(E) > 0$ și E este o mulțime pozitivă pentru măsura fuzzy reală $(\tilde{P}' - \varepsilon \tilde{P})$.

Demonstrație. Fie măsura reală fuzzy finită $\tilde{\nu}_n = \tilde{P}' - \frac{1}{n}\tilde{P}$; se observă că $\tilde{\nu}_n \ll \tilde{P}$. În continuare să considerăm o descompunere Hahn a lui X corespunzătoare măsurii $\tilde{P}' - \frac{1}{n}\tilde{P}$ restricționată la nucleul $\mathcal{N}$, deci $X = A_n \cup B_n$, $A_n \in \mathcal{N}$ iar $\tilde{\nu}_{n|\mathfrak{R}}(A_n) > 0$, $\forall n \in N$. Introducem mulțimile $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $B_0 = C$, $A_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ și observăm că $B_0 \subseteq B_n$ deci dacă $C \in \mathcal{N} \cap B_0$ rezultă că $\tilde{\nu}_{n|\mathfrak{R}}(C) \leqslant 0$ adică $\tilde{P}'_{|\mathfrak{R}}(C) \leqslant \frac{1}{n}\tilde{P}_{|\mathfrak{R}}(C)$, $\forall n \in N$ de unde $\tilde{P}'_{|\mathfrak{R}}(C) = 0$. Din $\tilde{P}'$ neidentic nulă rezultă că $\exists\, \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ cu $\tilde{P}'(\tilde{A}) > 0$. Atunci să arătăm că $\tilde{P}'_{|\mathfrak{R}}$ nu este identic nulă Într-adevăr dacă considerăm $D = S(\tilde{A})$ rezultă $D \in \mathcal{N}$ și $D \supseteq \tilde{A}$ deci $\tilde{P}_{|\mathfrak{R}}(D) \geqslant \tilde{P}(\tilde{A}) > 0$. Așadar $\tilde{P}'_{|\mathfrak{R}}(A_0) > 0$ deci $\exists n_0 \in N$ cu $\tilde{P}'_{|\mathfrak{R}}(A_{n_0}) > 0$ de unde rezultă că $\tilde{P}_{|\mathfrak{R}}(A_{n_0}) > 0$. Punînd $A_{n_0} = E$ și $\varepsilon = \frac{1}{n_0}$ se observă că acestea satisfac condițiile din enunț pentru $(\tilde{P}' - \varepsilon \tilde{P})$.

1.5. **Teoremă.** Fie $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ un cîmp borelian de probabilitate fuzzy cu nucleul $\mathcal{N}$ astfel că $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface (S.A.F. IV) și (S.A.F.V) iar $\tilde{P}$ satisface (P.F.V). Fie $\tilde{P} : \tilde{\mathcal{A}} \to [0, 1]$ o probabilitate fuzzy ce satisface (P.F.V) și $\tilde{P}' \ll \tilde{P}$. Atunci există o funcție nenegativă f, finită, $\mathcal{N}$-măsurabilă, unică afară de o egalitate a.p. $\tilde{P}_{|\mathfrak{R}}$, integrabilă prin raport cu $\tilde{P}_{|\mathfrak{R}}$, de așa manieră că :

$$\forall\, \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow \tilde{P}'(\tilde{A}) = \int f \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}.$$

Demonstrație. Demonstrația acestei teoreme se obține modificînd raționamentele cunoscute din demonstrația teoremei lui Lebesgue-Radon-Nicodym pentru mulțimi uzuale [2]. Dacă notăm cu $L(\tilde{P}_{|\mathfrak{R}})$ clasa funcțiilor integrabile prin raport cu $\tilde{P}_{|\mathfrak{R}}$ fie :

$$\mathcal{K} = \{0 \leqslant f \in L(\tilde{P}_{|\mathfrak{R}}) \,;\, \forall\, \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}},\ \int f \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}} \leqslant \tilde{P}'(\tilde{A})\}.$$

Mulțimea $\left\{\int f \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}},\ f \in \mathcal{K}\right\}$ este mărginită. Notînd cu $\alpha = \sup\left\{\int f \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}},\ f \in \mathcal{K}\right\}$ rezultă că $\forall\, n \in N$, $\exists\, g_n \in \mathcal{K}$ astfel ca $\int g_n \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}} > \alpha - \frac{1}{n}$ deci $\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}} = \alpha$.

Să introducem șirul (f_n) unde :

$$f_n = \bigvee_{k=1}^{n} g_k = \sup_{k=\overline{1,n}} \{g_k\}.$$

Se observă că $f_n \in L(\tilde{P}_{|\mathcal{N}})$ și că (f_n) este crescător. Considerînd mulțimea fuzzy $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$, punem :

$$A_k = \{x \in S(\tilde{A}) : f_n(x) = g_k(x)\},\ 1 \leqslant k \leqslant n$$

deci pentru un $n \in N$ fixat facem o diviziune după $k=\overline{1, n}$ a suportului $S(\tilde{A})$ și fie $B_1=A_1$, $B_2=A_2-A_1$, $B_3=A_3-(A_1 \cup A_2)$, ... $B_n=A_n-\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Se observă că $S(\tilde{A})=\bigcup_{k=1}^{n} B_k$, $B_k \cap B_{k'}=\emptyset$, $k \neq k'$.

Fie $\tilde{E}_k=\tilde{A} \cap B_k$, $k=\overline{1, n}$ de unde avem că $\tilde{A}=\bigcup_{k=1}^{n} \tilde{E}_k$, $\tilde{E}_k \cap \tilde{E}_{k'}=\tilde{0}$ și :

$$\int f_n \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\int f_n \, d\tilde{P}_{\bigcup_{k=1}^{n} \tilde{E}_k|\mathfrak{R}}=\int f_n \, d\tilde{P}_{\bigcup_{k=1}^{n} (\tilde{A} \cap B_k)|\mathfrak{R}}=\int f_n \, d\tilde{P}_{\tilde{A} \cap S(\tilde{A})|\mathfrak{R}}.$$

Ținîndu-se cont de ipoteze și de Lema 1.2 obținem :

$$\int f_n \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\int S(\tilde{A}) f_n \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\int \bigcup_{k=1}^{n} B_k f_n \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\sum_{k=1}^{n} \int B_k \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} \int B_k g_k \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \tilde{P}'(\tilde{A} \cap B_k)=\tilde{P}'(\tilde{A} \cap S(\tilde{A}))=\tilde{P}'(\tilde{A}).$$

Așadar $f_n \in \mathcal{K}$. Notînd cu $f_0=\lim_{n \to \infty} f_n$ se deduce că $f_0=\bigvee_{n=1}^{\infty} f_n=\bigvee_{k=1}^{\infty} g_k$ și aplicînd Teorema lui Levi avem :

$$\int f_0 \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}} \leqslant \alpha. \tag{1}$$

Se vede că pentru orice $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ avem :

$$\int f_0 \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}} \leqslant \tilde{P}'(\tilde{A})$$

și prin urmare $f_0 \in \mathcal{K}$. Dar din $f_n \geqslant g_n$ rezultă :

$$\int f_0 \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}} \geqslant \lim_{n \to \infty} \int g_n \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\alpha. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă egalitatea $\int f_0 \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\alpha$.

Modificînd valorile funcției f_0 în punctele în care este ∞ se obține o funcție $f=f_0$ a. p. $\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}$, finită, astfel ca :

$$\int f \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\alpha \quad \text{și} \quad \int f \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}} \leqslant \tilde{P}'(\tilde{A}).$$

Să arătăm că pentru orice $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ are loc egalitatea : $\tilde{P}'(\tilde{A})=\int f \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}$.

Pentru aceata să presupunem prin reducere la absurd că $\exists \, \tilde{A}_0 \in \tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca $\int f \, d\tilde{P}_{\tilde{A}_0|\mathfrak{R}}<\tilde{P}'(\tilde{A}_0)$. Introducem o măsură pozitivă și finită fuzzy $\tilde{P}''$definită pe $\tilde{\mathcal{A}}$ astfel :

$$\forall \, \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow \tilde{P}''(\tilde{A})=\tilde{P}'(\tilde{A})-\int f \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}.$$

Se observă că $\tilde{P}''(\tilde{A}_0)>0$ și $\tilde{P}'' \ll \tilde{P}$. Aplicînd Lema 1.7 avem că există $\varepsilon>0$ și $C\in\mathcal{H}$, $\tilde{P}(C)>0$ iar C este mulțime pozitivă pentru măsura fuzzy reală $(\tilde{P}''-\varepsilon\tilde{P})$, adică pentru orice $\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{A}}$ avem $\tilde{P}''(\tilde{A}\cap C)-\varepsilon\tilde{P}(\tilde{A}\cap C)\geqslant 0$, deci :

$$\forall\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{A}},\ \varepsilon\tilde{P}(\tilde{A}\cap C)\leqslant\tilde{P}''(\tilde{A}\cap C)=\tilde{P}'(\tilde{A}\cap C)-\int f\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}\cap C|\mathfrak{R}}. \tag{3}$$

Introducem funcția $g=f+\varepsilon C$ și se observă că pentru orice $\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{A}}$:

$$\int g\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\int f\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}+\varepsilon\int C\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\int f\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}+\varepsilon\int\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}\cap C|\mathfrak{R}}=$$

$$=\int f\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}+\varepsilon\tilde{P}(\tilde{A}\cap C).$$

Ținînd seama de (3) deducem :

$$\int g\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}\leqslant\int f\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}+\tilde{P}'(\tilde{A}\cap C)-\int f\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}\cap C}=\int(\tilde{1}-C)\,f\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}+$$

$$+\tilde{P}'(\tilde{A}\cap C)=\int f\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}\cap C'|\mathfrak{R}}+\tilde{P}'(\tilde{A}\cap C)\leqslant\tilde{P}'(\tilde{A}\cap C')+\tilde{P}'(\tilde{A}\cap C)=$$

$$=\tilde{P}'((\tilde{A}\cap C')\cup(\tilde{A}\cap C))=\tilde{P}'(\tilde{A}\cap\tilde{1})=\tilde{P}'(\tilde{A}).$$

Așadar $g\in\mathcal{K}$. Pe de altă parte :

$$\int g\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=\int f\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}+\varepsilon\tilde{P}(\tilde{A}\cap C)=\alpha+\varepsilon\tilde{P}(\tilde{A}\cap C)>\alpha.$$

și deci $g\notin\mathcal{K}$. Contradicția obținută se arată că

$$\forall\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{A}}\Rightarrow\tilde{P}'(\tilde{A})=\int f\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}.$$

Presupunem că mai există o funcție $0\leqslant h\in L(\tilde{P}|\mathcal{H})$ cu proprietatea că :

$$\forall\,\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{A}}\Rightarrow\tilde{P}'(\tilde{A})=\int h\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}.$$

Deoarece $\tilde{P}'$ este finită prin scădere rezultă :

$$\forall\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{A}}\Rightarrow\int(f-h)\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}=0\Leftrightarrow f=h\ \text{a.p.}\ \tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}$$

deci teorema este demonstrată.

1.6. **Observație.** Teorema 1.5. este o extindere a Teroemei lui Lebesgue-Nicodym enunțată pentru mulțimi uzuale. Dacă $\tilde{\mathcal{A}}=\{\tilde{A}:X\to[0,1]\mid\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{M}}(X,\mathcal{H})\}$ atunci această teoremă este o consecință a Teroemei lui Lebesgue-Nicodym deoarece :

$$\tilde{P}'(\tilde{A})=\int\tilde{A}\,\mathrm{d}\tilde{P}'|_{\mathfrak{R}}=\int\tilde{A}\,f d\tilde{P}|_{\mathfrak{R}}=\int f\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}$$

Fie două probabilități fuzzy $\tilde{P}'$ și $\tilde{P}$ definite pe $\tilde{\mathcal{A}}$.

1.7. **Definiție.** Se spune că probabilitatea fuzzy $\tilde{P}'$ este derivabilă prin raport cu probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ dacă există o funcție $\mathcal{H}$-măsurabilă f astfel ca :

$$\forall\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{A}}\Rightarrow\tilde{P}'(\tilde{A})=\int f\,\mathrm{d}\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{R}}.$$

În aceste condiții funcția f se numește derivata probabilității fuzzy $\tilde{P}'$ în raport cu probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ și avem notația $\frac{d\tilde{P}'}{d\tilde{P}} = f$. Din definiție se vede că dacă $\tilde{P}'$ este derivabilă prin raport cu $\tilde{P}$ atunci $\tilde{P}' \ll \tilde{P}$. Reciproc în condițiile Teoremei 1.8 orice probabilitate fuzzy $\tilde{P}'$ absolut continuă prin raport cu $\tilde{P}$ este derivabilă prin raport cu $\tilde{P}$.

Extinzîndu-se prin analogie raționamentele din [2] se obțin următoarele două aserțiuni :

1.8. **Propoziție.** Dacă $\tilde{P}' = \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2$ și $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$, $\tilde{P}$ satisface (P.F.V.) și sînt definite pe σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ cu nucleul $\mathcal{R}$ ce satisface axiomele (S.A.F.IV) și (S.A.F.V) iar $\tilde{P}_1 \gg \tilde{P}$, $\tilde{P}_2 \ll \tilde{P}$ atunci :

$$\frac{d\tilde{P}'}{d\tilde{P}} = \frac{d\tilde{P}_1}{d\tilde{P}} + \frac{d\tilde{P}_2}{d\tilde{P}}.$$

Demonstrație. Fiind îndeplinite condițiile din Teorema 1.8 avem :

$$\tilde{P}'(\tilde{A}) = \tilde{P}_1(\tilde{A}) = \tilde{P}_2(\tilde{A}) = \int f_1 \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{S}\mathfrak{r}} + \int f_2 \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{S}\mathfrak{r}} = \int (f_1 + f_2) \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{S}\mathfrak{r}}.$$

1.9. **Teoremă.** Dacă $\tilde{P}''$, $\tilde{P}'$, $\tilde{P}$ sînt probabilități fuzzy ca ce satisfac (P.F.V) și sînt definite pe σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ ce satisface (S.A.F.IV) și (S.A.F.V) iar $\tilde{P}'' \ll \tilde{P}'$ și $\tilde{P}' \ll \tilde{P}$ atunci :

$$\frac{d\tilde{P}''}{d\tilde{P}} = \frac{d\tilde{P}''}{d\tilde{P}'} \cdot \frac{d\tilde{P}'}{d\tilde{P}}.$$

Demonstrație. Conform Teoremei 1.8 există $f \geqslant 0$, $\mathcal{R}$-măsurabilă astfel $\tilde{P}''(\tilde{A}) = \int f \, d\tilde{P}'_{\tilde{A}|\mathfrak{S}\mathfrak{r}}$ și $g \geqslant 0$, $\mathcal{R}$-măsurabilă astfel ca $\tilde{P}'(\tilde{A}) = \int g \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{S}\mathfrak{r}}$. Deducem conform Teoremei lui Borel că $\exists\, (f_n)$ etajate $f_n \nearrow f$ de unde rezultă că $f_n g \nearrow f g$. Aplicînd Teorema lui Levi, obținem :

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\tilde{P}'_{\tilde{A}|\mathfrak{S}\mathfrak{r}} = \int f \, d\tilde{P}'_{\tilde{A}|\mathfrak{S}\mathfrak{r}} \tag{1}$$

și

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n g \, d\tilde{P}'_{\tilde{A}|\mathfrak{S}\mathfrak{r}} = \int f g \, d\tilde{P}'_{\tilde{A}|\mathfrak{S}\mathfrak{r}}. \tag{2}$$

Dar f_n fiind funcții etajate vor avea forma $f_n = \sum_{k=1}^{p_n} \alpha_k^{(n)} B_k$ $B_k \in \mathcal{R}$. Atunci :

$$\int f_n \, d\tilde{P}'_{\tilde{A}|\mathfrak{S}\mathfrak{r}} = \sum_{k=1}^{p_n} \alpha_k^{(n)} \tilde{P}'_{\tilde{A}|\mathfrak{S}\mathfrak{r}}(B_k).$$

Pe de altă parte :

$$\tilde{P}'_{\tilde{A}|\mathfrak{S}\mathfrak{r}}(B_k) = \int g \, d\tilde{P}_{\tilde{A} \cap B_k|\mathfrak{S}\mathfrak{r}}.$$

Căci conform Lemei 1.2 :

$$\sum_{k=1}^{p_n} \alpha_k^{(n)} \tilde{P}'_{\tilde{A}|\mathfrak{K}}(B_k) = \sum_{k=1}^{p_n} \alpha_k^{(n)} \int g \, d\tilde{P}_{\tilde{A}\cap B_k|\mathfrak{K}} = \int g f_n \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{K}}.$$

Deducem că :

$$\int f_n \, d\tilde{P}'_{\tilde{A}|\mathfrak{K}} = \int g f_n \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{K}}.$$

Trecînd la limită și ținînd cont de (1) și (2) obținem :

$$\int f \, d\tilde{P}'_{\tilde{A}|\mathfrak{K}} = \int g f \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{K}}.$$

1.10. **Consecință.** În condițiile Teoremei 1.9 avem :

$$\int f \, d\tilde{P}'|_{\mathfrak{K}} = \int f \frac{d\tilde{P}'}{d\tilde{P}} \, d\tilde{P}|_{\mathfrak{K}}.$$

Aplicînd Teorema 1.9 avem :

$$\tilde{P}''(\tilde{A}) = \int f \, d\tilde{P}'_{\tilde{A}|\mathfrak{K}} = \int f \, d\tilde{P}_{\tilde{A}|\mathfrak{K}}, \quad \forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Obținem rezultatul dorit luînd $\tilde{A} = \tilde{1}$.

1.11. **Observație.** Toate considerațiile din această lucrare cu privire la teoremele de reprezentare sînt valabile pentru o măsură fuzzy pozitivă cu valori finite care satisface condițiile impuse pe parcurs.

BIBLIOGRAFIE

[1] Smith, R. E., Measure Theory on Fuzzy Sets, Thesis, Depart. of Math. Univ. of Saskatchewan Saskatoon Canada, (1968).
[2] Halmos, P. R., Measure Theory, New-York, (1964).
[3] Roventa, E., σ-algebre și măsuri fuzzy, Bul. Ști. Tehn. Inst. Politehn. Timișoara (1, 1980).
[4] Natanson, I. P., Teoria funcțiilor de o variabilă reală Ed. teh. București, (1957).

THÉORÈMES DE REPRÉSENTATION POUR LES PROBABILITÉS FLOUES

RÉSUMÉ

Le but du travail consiste à présenter de nouvelles démonstrations pour une série de théorèmes de représentation de la probabilité floue qui sont abordés dans le travail „Measure Theory on Fuzzy Sets", Thesis, Depart. of Math. Univ. of Saskatchewan, Saskatoan, Canada, 1968. par R. E. Smith, pour les mesures floues, le plus important étant le théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 2 —1980**

PROBABILITĂŢI FUZZY REGULATE

DE

EUGEN ROVENTA

Teoria regularităţii probabilităţilor fuzzy este tratată în această lucrare în mod axiomatic, generalizîndu-se prin analogie rezultatele din [1]. Terminologia şi notaţiile sînt din [2].

După prezentarea cîtorva noţiuni cu caracter preliminar vom obţine în anumite condiţii suplimentare (ce apar din necesitatea de a învinge dificultăţile provocate de faptul că pentru probabilitatea fuzzy nu se poate arăta ca şi în cazul uzual proprietatea de numărabil subaditivitate), un rezultat similar cu cel din spaţiile obişnuite referitor la regularitatea unei reuniuni şi intersecţii numărabile de mulţimi fuzzy.

În final problema obţinerii de criterii de regularitate a probabilităţilor fuzzy este considerată, pentru obţinerea cărora impunîndu-se modificarea axiomei (VII) din [1].

Pentru început vom introduce următoarele axiome (pe parcurs din necesităţi firesti vom adăuga altele la această listă).

(I) $\tilde{P} : \tilde{\mathcal{A}} \to [0, 1]$ este o probabilitrte fuzzy definită pe σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$.

(II) $\tilde{\mathcal{F}}$ este o subclasă a lui $\tilde{\mathcal{A}}$ care este închisă faţă de intersecţia numărabilă şi reuniunea finită adică :

$$\tilde{F}_n \in \tilde{\mathcal{F}} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n \in \tilde{\mathcal{F}}, \bigcup_{n=1}^{k} \tilde{F}_n \in \tilde{\mathcal{F}}.$$

În plus $\tilde{0} \in \tilde{\mathcal{F}}$.

(III) $\tilde{\mathcal{G}}$ este o subclasă a lui $\tilde{\mathcal{A}}$ care este închisă faţă de reuniunea numărabilă şi intersecţia finită adică :

$$\tilde{G}_n \in \tilde{\mathcal{G}} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n \in \tilde{\mathcal{G}}, \bigcap_{n=1}^{k} \tilde{G}_n \in \tilde{\mathcal{G}}.$$

În plus $\forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\exists \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}$ astfel ca $\tilde{A} \subseteq \tilde{G}$.

Exemple. 1) Fie $X = \mathbf{R}$, înzestrat cu topologia naturală τ_0, $\mathcal{A}_1 = \sigma(\mathcal{G}_1)$ — σ-algebra generată de mulţimile deschise, $\mathcal{F}_1$ este clasa mulţimilor închise iar $\mathcal{G}_1$-clasa mulţimilor deschise.

2) Fie X un spaţiu topologic local compact Hausdorff, $\mathcal{F}_2$ clasa compactelor, $\mathcal{G}_2$-clasa mulţimilor Borel deschise şi $\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{F}_2)$.

3) Fie X un spaţiu topologic local compact Hausdorff, $\mathcal{F}_3$ clasa compactelor de tip G_δ, $\mathcal{G}_3$-clasa mulţimilor Baire deschise şi $\mathcal{A}_3 = \sigma(\mathcal{F}_3)$.

1.1. **Definiţie.** Zicem că mulţimile fuzzy $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ este regulată interior prin raport cu sistemul $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ dacă are loc egalitatea :

$$\tilde{P}(\tilde{A}) = \sup \{\tilde{P}(\tilde{F}), \tilde{F} \leqslant \tilde{A},\ F \in \tilde{\mathcal{F}}\}.$$

Se demonstrează imediat următoarea :

1.2. **Propoziţie.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F.IV) şi probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V) atunci condiţia necesară şi suficientă ca mulţimea fuzzy $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ să fie regulată interior este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să $\exists\, \tilde{K} \in \tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{K} \subseteq \tilde{A}$ astfel ca $\forall\, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{K} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{A}$ să avem $\tilde{P}(\tilde{A} - \tilde{B}) < \varepsilon$

1.3. **Consecinţă.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F.IV) şi probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V) atunci condiţia necesară şi suficientă ca mulţimea $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ să fie regulată interior este ca $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \tilde{K} \in \tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{K} \subseteq \tilde{A}$, altfel ca $\forall \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{B} \subseteq \tilde{A} - \tilde{K}$ să avem $\tilde{P}(\tilde{B}) < \varepsilon$.

1.4. **Definiţie.** Zicem că mulţimea fuzzy $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ este regulată exterior prin raport cu sistemul $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{P})$ dacă are loc egalitatea :

$$\tilde{P}(\tilde{A}) = \inf \{\tilde{P}(\tilde{G}),\ \tilde{A} \subseteq \tilde{G},\ \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}\}.$$

Este aproape evidentă următoarea :

1.5. **Propoziţie.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F.IV) şi probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V) atunci condiţia necesară şi suficientă ca mulţimea $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ să fie regulată exterior este ca $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{G} \subseteq \tilde{A}$ astfel ca $\forall\, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{G}$ să avem $\tilde{P}(\tilde{B} - \tilde{A}) < \varepsilon$.

1.6. **Consecinţă.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F./V) şi probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V) atunci condiţia necesară şi suficientă ca mulţimea fuzzy $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ să fie regulată exterior este ca pentru orice $\varepsilon > 0$, $\exists\, \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{G} \supseteq \tilde{A}$ astfel ca $\forall \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{B} \subseteq \tilde{G} - \tilde{A}$ să avem $\tilde{P}(\tilde{B}) < \varepsilon$.

1.7. **Definiţie.** Zicem că mulţimea fuzzy $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ este regulată prin raport cu sistemul $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{P})$ dacă este regulată interior şi exterior prin raport cu acest sistem.

1.8. **Propoziţie.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F.IV) şi probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V) atunci condiţia necesară şi suficientă ca $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ să fie regulată este ca pentru orice $\varepsilon > 0$, $\exists\, \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{F} \subseteq \tilde{A} \subseteq \tilde{G}$ astfel ca $\forall \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{F} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{G}$ să avem : $|\tilde{P}(\tilde{A}) - \tilde{P}(\tilde{B})| < \varepsilon$.

Demonstraţie. Dacă $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ este regulată, $\exists\, \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{F} \subseteq \tilde{A}$ şi $\tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{G} \supseteq \tilde{A}$ astfel că $\tilde{P}(\tilde{A} - \tilde{F}) < \frac{\varepsilon}{2}$ şi $\tilde{P}(\tilde{G} - \tilde{A}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Fie $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca $\tilde{F} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{G}$. Dacă $\tilde{F} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{A}$ sau $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{G}$, este clar că :

$$\tilde{P}(\tilde{A}) - \tilde{P}(\tilde{B}) = |\tilde{P}(\tilde{A}) - \tilde{P}(\tilde{B})| = \tilde{P}(\tilde{A} - \tilde{B}) < \tilde{P}(\tilde{A} - \tilde{F}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\tilde{P}(\tilde{B}) - \tilde{P}(\tilde{A}) = |\tilde{P}(\tilde{B}) - \tilde{P}(\tilde{A})| = \tilde{P}(\tilde{B} - \tilde{A}) < \tilde{P}(\tilde{G} - \tilde{A}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

În caz contrar din $\tilde{A}\subseteq\tilde{G}$, $\tilde{B}\supseteq\tilde{G}$ vom avea $\tilde{B}-\tilde{B}\cap\tilde{A}\subseteq\tilde{G}-\tilde{A}$ și $|\tilde{B}\cap\tilde{A}-\tilde{A}|\subseteq$ $\subseteq\tilde{G}-\tilde{A}$ de unde se deduce :

$$|\tilde{P}(\tilde{B})-\tilde{F}(\tilde{A})|\leqslant|\tilde{F}(\tilde{B}-\tilde{B}\cap\tilde{A})|+\tilde{P}(|\tilde{B}\cap\tilde{A}-\tilde{A}|)|\leqslant 2\tilde{P}(\tilde{G}-\tilde{A})<\varepsilon.$$

Reciproca rezultă imediat ținîndu-se seama de Propozițiile 1.2 și 1.5.

1.9. **Propoziție.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F.IV) și probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V) atunci condiția necesară și suficientă ca $\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{A}}$ să fie regulată este ca $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\tilde{F}\in\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{G}\in\tilde{\mathcal{G}}$ astfel ca $\tilde{F}\subseteq\tilde{A}\subseteq\tilde{G}$ și $\forall\,\tilde{B}\in\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{B}\subseteq\tilde{G}-\tilde{F}$ să avem $\tilde{P}(\tilde{B})<\varepsilon$.

Demonstrația se face ușor luîndu-se în considerare Consecințele 1.3 și 1.6.

1.10. **Definiție.** Zicem că probabilitatea fuzzy $\tilde{P}:\tilde{\mathcal{A}}\to[0,1]$ este regulată prin raport cu sistemul $(X,\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{G}})$ dacă orice mulțime $\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{A}}$ este regulată prin raport cu sistemul $(X,\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{G}},\tilde{P})$.

Exemple. 1) Orice probabilitate uzuală definită pe $\mathcal{A}_1$, este regulată prin raport cu sistemul $(X,\mathcal{A}_1,\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)$.

2) Orice măsură pozitivă Baire definită pe $\mathcal{A}_3$ este regulată prin raport cu sistemul $(X,\mathcal{A}_3,\mathcal{F}_3,\mathcal{G}_3)$. În continuare cînd nu va fi confuzie vom spune prin abreviere mulțimi și măsuri regulate fără a mai indica sistemul.

1.11. **Propoziție.** 1) Dacă $\tilde{P}(\tilde{A})=1\Rightarrow\tilde{A}$ este regulată exterior. 2) Dacă $\tilde{P}(\tilde{A})=0\Rightarrow\tilde{A}$ este regulată interior. 3) $\forall\,\tilde{F}\in\tilde{\mathcal{F}}$ este regulată interior. 4) $\forall\,\tilde{G}\in$ $\in\tilde{\mathcal{G}}$ este regulată exterior. 5) Dacă $\tilde{F}_n\in\tilde{\mathcal{F}}\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}\tilde{F}_n$ este regulată interior. 6) Dacă $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F.IV), $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V) și $\tilde{G}_n\in$ $\in\tilde{\mathcal{G}}$ atunci $\bigcap_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_n$ este regulată exterior.

Demonstrație. Afirmațiile (1)—(5) se arată imediat. Pentru (6) dacă $\tilde{G}_n\in\tilde{\mathcal{G}}$ punem $\tilde{E}_k=\bigcap_{n=1}^{k}\tilde{G}_n\in\tilde{\mathcal{G}}$ deci $\tilde{E}_k\searrow\bigcap_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_n$. Fie $\tilde{H}_m=\tilde{G}_1-\tilde{E}_m$. Atunci $\{\tilde{H}_m\}$ este un șir crescător și $\bigcup_{1}^{\infty}\tilde{H}_m=\tilde{G}_1-\bigcap_{1}^{\infty}\tilde{E}_m$. Deducem că $\tilde{P}\left(\tilde{G}_1-\bigcap_{1}^{\infty}\tilde{E}_m\right)-$ $=\lim_{m\to\infty}\tilde{P}(\tilde{H}_m)=\lim_{m\to\infty}\tilde{P}(\tilde{G}_1-\tilde{E}_m)$ deci $\tilde{P}\left(\bigcap_{1}^{\infty}\tilde{E}_m\right)=\lim\tilde{P}(\tilde{E}_m)$. Dar atunci este ușor de văzut că :

$$\tilde{P}\left(\bigcap_{1}^{\infty}\tilde{G}_n\right)=\inf\left\{\tilde{P}(\tilde{G}),\ \bigcap_{1}^{\infty}\tilde{G}_n\subseteq\tilde{G},\ \tilde{G}\in\tilde{\mathcal{G}}\right\}.$$

1.12. **Propoziție.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F.IV)- probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V), $\{\tilde{A}_n\}\subseteq\tilde{\mathcal{A}}$ sînt regulate exterior și $\forall\,\{\tilde{G}_n\}\subseteq\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{A}_n\subseteq\tilde{G}_n$, $\exists\,\tilde{B}\in\tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca $\tilde{G}_n-\tilde{A}_n\leqslant\tilde{B}-\sum_{k=1}^{n-1}(\tilde{G}_k-\tilde{A}_k)$, $n=2,3,\ldots$ atunci $\tilde{A}=\bigcup_{1}^{\infty}\tilde{A}_n$ este regulată exterio.

Demonstrație. Din ipoteze avem că $\forall \varepsilon > 0$, $n \in N$, $\exists \tilde{G}_n \in \tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{A}_n \leqslant \tilde{G}_n$ astfel ca $\tilde{P}(\tilde{G}_n) \leqslant \tilde{P}(\tilde{A}_n) + \varepsilon/2^n$, de unde rezultă că $\tilde{P}(\tilde{G}_n - \tilde{A}_n) < \varepsilon/2^n$. Punînd $\tilde{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n \in \tilde{\mathcal{G}}$ se vede că $\tilde{A} \subseteq \tilde{G}$ și $\tilde{G} - \tilde{A} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{G}_n - \tilde{A}_n)$. Prin urmare ținîndu-se cont de Observația 1.14. [2] obținem :

$$\tilde{P}(\tilde{G} - \tilde{A}) \leqslant \tilde{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{G}_n - \tilde{A}_n)\right) \leqslant \tilde{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{G}_n - \tilde{A}_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{G}_n - \tilde{A}_n) < \varepsilon.$$

Așadar $\tilde{P}(\tilde{G}) < \tilde{P}(\tilde{A}) + \varepsilon$ ceea ce înseamnă că :

$$\tilde{P}(\tilde{A}) = \inf \{\tilde{P}(\tilde{G}),\ \tilde{G} \supseteq \tilde{A},\ \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}\}.$$

1.13. **Lemă.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F.IV), probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V) și $\tilde{A}_i \in \tilde{\mathcal{A}}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ sînt regulate interior iar $\forall \{\tilde{F}_i\} \subseteq (\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{F}_i \subseteq \tilde{A}_i$, $\exists \tilde{C} \in \tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca $\tilde{A}_i - \tilde{F}_i \subseteq \tilde{C} - \sum_{k=1}^{i-1} (\tilde{A}_k - \tilde{F}_k)$, $i = 2, 3, \ldots, n$ atunci $\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \tilde{A}_i$ este regulată interior.

Demonstrație. Este analoagă cu cea precedentă ținîndu-se seama de axioma (II) și de observația 1.14. [2].

1.14. **Propoziție.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F. IV), probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V) și $\{\tilde{A}_m\} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ sînt regulate interior iar $\forall \{\tilde{F}_m\} \subseteq (\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{F}_m \subseteq \tilde{A}_m$, $\exists \tilde{C} \in \tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca $\tilde{A}_m - \tilde{F}_m \subseteq \tilde{C} - \sum_{k=1}^{m-1} (A_k - F_k)$, $m = 2, 3, \ldots$ atunci $\tilde{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ este regulată interior.

Demonstrație. Punînd $\tilde{H}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_m$ după Lema 1.13 $\tilde{H}_n$, $\forall n \in N$ vor fi regulate interior și $\tilde{H}_n \nearrow \tilde{A}$ de unde rezultă imediat ca $\tilde{A}$ este regulată interior.

De o manieră analoagă se arată următoarele :

1.15. **Propoziție.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F. IV), probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V) $\{\tilde{A}_m\}$ sînt regulate interior iar $\forall \{\tilde{F}_m\} \subseteq (\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{F}_m \subseteq \tilde{A}_m$, $\exists \tilde{C} \in \tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca $\tilde{A}_m - \tilde{F}_m \subseteq \tilde{C} - \sum_{k=1}^{n-1} (\tilde{A}_k - \tilde{F}_k)$, $m = 2, 3, \ldots$ atunci $\tilde{A} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \tilde{A}_m$ este regulată interior.

1.16. **Lemă.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F. IV), probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.V!F.) și $\tilde{A}_i \in \tilde{\mathcal{A}}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ sînt regulate exterior iar $\forall \{\tilde{G}_i\} \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{A}_i \subseteq \tilde{G}_i$, $\exists \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca $\tilde{G}_i - \tilde{A}_i \subseteq \tilde{B} - \sum_{k=1}^{i-1} (\tilde{G}_k - \tilde{A}_k)$, $i = 2, 3, \ldots, n$, atunci $\tilde{A} = \bigcap_{j=1}^{n} \tilde{A}_i$ este regulată exterior.

1.17. **Propoziție.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ verifică axioma (S.A.F. IV), probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V) și $\{\tilde{A}_n\}\subseteq\tilde{\mathcal{A}}$ sînt regulate exterior iar $\forall\ \{\tilde{G}_n\}\subseteq\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{G}_n\supseteq\tilde{A}_n$ $\exists\tilde{B}\in\tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca $\tilde{G}_n-\tilde{A}_n\subseteq\tilde{B}-\sum_{k=1}^{n-1}(\tilde{G}_k-\tilde{A}_k)$, $n=2, 3, \ldots$ atunci $\tilde{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_n$ este regulată exterior. Din propozițiile precedente deducem :

1.18. **Teoremă.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F. IV), probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V) și

(i) $\forall n\in N$ mulțimea fuzzy $\tilde{A}_n$ este regulată.

(ii) $\forall\ \{\tilde{G}_n\}\subseteq\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{G}_n\supseteq\tilde{A}_n$, $\exists\tilde{B}\in\tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca :

$$\tilde{G}_n-\tilde{A}_n\subseteq\tilde{B}-\sum_{k=1}^{n-1}(\tilde{G}_k-\tilde{A}_k),\ n=2,\ 3,\ \ldots$$

(iii) $\forall\ \{\tilde{F}_m\}\subseteq\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{F}_m\subseteq\tilde{A}_m$, $\exists\,\tilde{C}\in\tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca :

$$\tilde{A}_m-F_m\subseteq\tilde{C}-\sum_{k=1}^{m-1}(\tilde{A}_k-\tilde{F}_k)\ \ m=2,3,\ \ldots$$

atunci $\bigcup_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_n$ și $\bigcap_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_n$ sînt regulate.

1.19. **Teoremă.** Suma unui număr finit de probabilități fuzzy regulate este o măsură fuzzy regulată.

Demonstrație. Dacă $\tilde{P}=\tilde{P}_1+\tilde{P}_2$, se arată fără nici o dificultate ținîndu-se cont de axiomele (II) și (III) că $\forall\,\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{A}}$ este regulată interior prin raport cu sistemul $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{P}_1+\tilde{P}_2)$.

1.20. **Consecință.** Dacă probabilitățile fuzzy $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \ldots, \tilde{P}_n$ sînt regulate și dacă $a_1, a_2, \ldots a_n$ sînt constante pozitive finite cu $\sum_{k=1}^{n}a_k=1$ atunci probabilitatea fuzzy $\tilde{P}=a_k\tilde{P}_k$ este regulată.

În continuare dorim să obținem criterii pentru regularitatea probabilității fuzzy $\tilde{P}$. Pentru aceasta este nevoie să se introducă axioma :

(IV) Dacă $\tilde{G}\in\tilde{\mathcal{G}}$ și $\tilde{F}\in\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{F}\subseteq\tilde{G}$ atunci $\tilde{G}-\tilde{F}\in\tilde{\mathcal{G}}$.

1.21. **Propoziție.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F. IV), probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V) și $\forall\,\tilde{F}, \tilde{K}\in\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{K}\subseteq\tilde{F}$ sînt regulate exterior (deci regulate) atunci $\tilde{F}-\tilde{G}$ este regulată exterior.

Demonstrație. Din $\tilde{F}$ regulată avem că $\forall\varepsilon>0$ $\exists\tilde{G}\in\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{F}\subseteq\tilde{G}$ astfel ca $\tilde{P}(\tilde{G}-\tilde{F})<\varepsilon$. Dar $\tilde{F}-\tilde{K}\subseteq\tilde{G}-\tilde{K}\in\tilde{\mathcal{G}}$ conform axiomei (IV). Atunci :

$$\tilde{P}((\tilde{G}-\tilde{K})-(\tilde{F}-\tilde{K}))=\tilde{P}(\tilde{G}-\tilde{K})<\varepsilon.$$

1.22. **Definiție.** Spunem că mulțimea $\tilde{A}\in\tilde{\mathcal{A}}$ este mărginită prin raport cu sistemul $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{P})$ dacă $\exists\tilde{F}\in\tilde{\mathcal{F}}$ astfel ca $\tilde{A}\subseteq\tilde{F}$.

Pentru cele ce urmează este nevoie de următoarea axiomă :

(V) Dacă $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ atunci $\exists \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{Q}}$ mărginită astfel ca $\tilde{F} \subseteq \tilde{G}$.

Cu alte cuvinte pentru $\forall \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$, $\exists \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{Q}}$, $\tilde{K} \in \tilde{\mathcal{F}}$ astfel ca $\tilde{F} \subseteq \tilde{G} \subseteq \tilde{K}$.

1.23. **Propoziţie.** Dacă σ-algebra fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ satisface axioma (S.A.F. IV), probabilitatea fuzzy $\tilde{P}$ satisface axioma (P.F.V) şi $\forall \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{Q}}$ mărginită este regulată interior (deci regulată) atunci $\tilde{F} - \tilde{K}$ este regulată interior $\forall \tilde{F}$, $\tilde{K} \in \tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{K} \subseteq \tilde{F}$.

Demonstraţie. Dacă $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ conform axiomei (V) $\exists \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{Q}}$, $\tilde{F} \subseteq \tilde{G}$, este mărginită. Dar atunci conform axiomei (IV) $\tilde{G} - \tilde{K} \in \tilde{\mathcal{Q}}$ şi este mărginită deci conform ipotezei este regulată interior. Aşadar $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \tilde{E} \in \tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{E} \subseteq \tilde{G} - \tilde{K}$ astfel ca $\tilde{P}((\tilde{G} - \tilde{K}) - \tilde{E}) < \varepsilon$. Dar se observă că $\tilde{F} - \tilde{K} \supseteq \tilde{F} \cap \tilde{E}$ şi $\tilde{F} \cap \tilde{E} \in \tilde{\mathcal{F}}$ deoarece $\tilde{F} - \tilde{K} = (\tilde{F} \cap \tilde{G}) - \tilde{K} = \tilde{F} \cap (\tilde{G} - \tilde{K}) \supseteq \tilde{F} \cap \tilde{E}$. Deducem că : $\tilde{P}((\tilde{F} - \tilde{K}) - (\tilde{F} \cap \tilde{E})) \leqslant \leqslant \tilde{P}((\tilde{G} - \tilde{K} . - \tilde{E}) < \varepsilon$.

Dacă notăm cu $\tilde{\mathcal{E}}$ clasa mulţimilor regulate exterior, $\tilde{\mathcal{J}}$ clasa mulţimilor regulate interior şi $\tilde{\mathcal{M}}_g$ clasa mulţimilor din $\tilde{\mathcal{Q}}$ mărginite, atunci ultimele două Propoziţii ne arată că : ipoteza $\tilde{\mathcal{F}} \subseteq \tilde{\mathcal{E}}$ implică faptul că $\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}} \subseteq \tilde{\mathcal{E}}$ cînd are sens, iar ipoteza $\tilde{\mathcal{M}}_g \subseteq \tilde{\mathcal{J}}$ implică faptul că $\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}} \subseteq \tilde{\mathcal{J}}$ cînd are sens. Ne interesează în continuare verificarea simultană a ambelor condiţii adică regularitatea unei mulţimi din $\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}$ cînd are sens.

Pentru aceasta avem nevoie de următoarea axiomă :

(VI) Dacă $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ şi $\tilde{G} \in \tilde{\mathcal{Q}}$, $\tilde{G} \subseteq \tilde{F}$ atunci $\tilde{F} - \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{F}}$.

1.24. **Teoremă.** Dacă $\tilde{\mathcal{A}}$ este σ-algebră fuzzy ce satisface axioma (S.A.F. IV) şi $\tilde{P}$ probabilitatea fuzzy ce satisface axioma (P.F.V) atunci următoarele condiţii sînt echivalente :

(a) Orice $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ este regulată exterior.

(b) Orice $\tilde{G} \in \tilde{\mathcal{Q}}$ mărginită este regulată interior.

Demonstraţie. (b)⇒(a). Fie $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$. Conform axiomei (V) $\exists\, \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{Q}}$ mărginită, $\tilde{F} \subseteq \tilde{G}$. Atunci mulţimea fuzzy $\tilde{G} - \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{Q}}$ conform axiomei (IV) şi este mărginită deci din ipoteză este regulată interior. Aşadar $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \tilde{K} \in \tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{K} \subseteq \tilde{G} - \tilde{K}$ astfel că $\tilde{P}((\tilde{G} - \tilde{F}) - \tilde{K}) < \varepsilon$. Se observă că vom avea $\tilde{F} = \tilde{G} - (\tilde{G} - \tilde{F}) \subseteq \tilde{G} - \tilde{K}$ şi $\tilde{G} - \tilde{K} \in \tilde{\mathcal{Q}}$ conform axiomei (IV). Mai departe $(\tilde{G} - \tilde{K}) - \tilde{F} = (\tilde{G} - \tilde{F}) - \tilde{K}$ deci, $\tilde{P}((\tilde{G} - \tilde{K}) - \tilde{F}) = \tilde{P}((\tilde{G} - \tilde{F}) - \tilde{K}) < \varepsilon$.

(a)⇒(b). Fie $\tilde{G} \in \tilde{\mathcal{Q}}$ mărginită deci $\exists\, \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{G} \subseteq \tilde{F}$ şi conform axiomei (VI) $\tilde{F} - \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{F}}$ iar din ipoteză $\tilde{F} - \tilde{G}$ este regulată exterior. Aşadar $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \tilde{H} \in \tilde{\mathcal{Q}}$, $\tilde{F} - \tilde{G} \subseteq \tilde{H}$ şi $\tilde{P}(\tilde{H} - (\tilde{F} - \tilde{G})) < \varepsilon$. Vom avea $\tilde{F} - \tilde{H} \subseteq \tilde{F} - (\tilde{F} - \tilde{G}) = \tilde{G}$ şi $\tilde{F} - \tilde{H} \in \tilde{\mathcal{F}}$ conform axiomei (VI). De asemenea $\tilde{G} - (\tilde{F} - \tilde{H}) = \tilde{H} - (\tilde{F} - \tilde{G})$ de unde rezultă că $P(\tilde{G} - (\tilde{F} - \tilde{H})) < \varepsilon$.

Prin σ-algebra fuzzy generată de clasa $\tilde{\mathcal{C}}$ şi notată cu $\tilde{\sigma}(\tilde{\mathcal{C}})$ se înţelege cea mai mică σ-algebră fuzzy care include clasa $\tilde{\mathcal{C}}$.

Următoarea axiomă asigură faptul că regularitatea mulţimilor fuzzy din $\tilde{\mathcal{F}}$ sau a mulţimilor fuzzy mărginite din $\tilde{\mathcal{Q}}$ conduce la regularitatea mulţimilor fuzzy din $\tilde{\mathcal{A}}$.

(VII) σ-algebra generaltă de $\tilde{\mathcal{F}}$ este $\tilde{\mathcal{A}}$, adică $\tilde{\mathcal{A}}=\tilde{\sigma}(\tilde{\mathcal{F}})$.

În plus $\exists\, \tilde{F}_n \in \tilde{\mathcal{F}}$ astfel ca $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n = \tilde{1}$.

1.25. **Lemă.** Dacă notăm $\tilde{\sigma}_0(\tilde{\mathcal{F}}) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} (\tilde{F}_i - \tilde{K}_i),\ \tilde{K}_i \subseteq \tilde{F}_i,\ (\tilde{F}_i - \tilde{K}_i) \cap \right.$ $\left. \cap\, (\tilde{F}_j - \tilde{K}_j) = 0,\ i \neq j,\ \tilde{F}_i,\ \tilde{K}_i \in \tilde{\mathcal{F}} \right\}$ și $\tilde{\mathcal{A}}$ este o σ-algebră fuzzy ce satisface axioma :
(S.A.F. IV) atunci :

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\mathcal{F}}) = \tilde{\sigma}_0(\tilde{\mathcal{F}}).$$

Demonstrație. Se observă imediat că $\tilde{\mathcal{F}} \subseteq \tilde{\sigma}_0(\tilde{\mathcal{F}}) \subseteq \tilde{\sigma}(\tilde{\mathcal{F}})$. Reciproc penru a arăta incluziunea $\tilde{\sigma}(\tilde{\mathcal{F}}) \subseteq \tilde{\sigma}_0(\tilde{\mathcal{F}})$ se demonstrează întîi că $\tilde{\sigma}_0(\tilde{\mathcal{F}})$ este o σ-algebră fuzzy folosindu-se axiomele (I) și (VII).

1.25. **Teoremă.** Dacă $\tilde{\mathcal{A}}$ este σ-algebră fuzzy ce satisface axioma (S.A.F. IV), $\tilde{P}$ este probabilitatea fuzzy ce satisface axioma (P.F.V) și $\forall\, \{\tilde{G}_n\} \subseteq \tilde{\mathcal{Q}}$, $\tilde{G}_n \supseteq \tilde{A}_n$, $\exists\, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca $\tilde{G}_n - \tilde{A}_n \subseteq \tilde{B} - \sum_{k=1}^{n-1} (\tilde{G}_k - \tilde{A}_k)$, $k=2,3,\ldots, \forall \{\tilde{F}_m\} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{F}_m \subseteq$ $\subseteq \tilde{A}_m$, $\exists\, \tilde{C} \in \tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca $\tilde{A}_m - \tilde{F}_m \subseteq \tilde{C} - \sum_{k=1}^{m-1} (\tilde{A}_k - \tilde{F}_k)$, $m=2, 3, \ldots$ atunci următoarele condiții sînt echivalente :

(a) $\tilde{P}$ este regulată.
(b) Orice $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ este regulată exterior.
(c) Orice $\tilde{G} \in \tilde{\mathcal{Q}}$ mărginită este regulată interior.

Demonstrație. Este evident că (a) implică (b) și (c). Conform Teoremei 1.24 (b)⇒(c). Să arătăm că (c)⇒(a). Presupunem că (c) este adevărată. Atunci fiind adevărată și (b) conform Teoremelor 1.21 și 1.23 rezultă că $\tilde{F} - \tilde{K}$ este regulată $\forall\, \tilde{F},\ \tilde{K} \in \tilde{\mathcal{F}},\ \tilde{K} \subseteq \tilde{F}$. Conform Lemei 1.25 $\tilde{\sigma}(\tilde{\mathcal{F}}) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} (\tilde{F}_i - \tilde{K}_i),\ (\tilde{F}_i - \tilde{K}_i) \cap \right.$ $\left. \cap\, (\tilde{F}_i - \tilde{K}_i) = 0,\ i \neq j',\ \tilde{F}_i, \tilde{K}_i \in \tilde{\mathcal{F}},\ \tilde{K}_i \subseteq \tilde{F}_i \right\}$. Fiind satisfăcute ipotezele Teoremei 1.18 rezultă că orice $\tilde{E} \in \tilde{\sigma}(\tilde{\mathcal{F}})$ este regulată. Să arătăm în continuare că $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ implică $\tilde{F} \cap \tilde{E}$ este regulată pentru orice $\tilde{E} \in \tilde{\mathcal{A}}$. Pentru aceasta fie :

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{\tilde{E} \in \tilde{\mathcal{A}} \mid \tilde{F} \cap \tilde{E} \quad \text{este regulată}, \quad \forall\, \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}\}.$$

Se observă că $\tilde{\mathcal{M}}$ este o clasă monotonă și $\tilde{\mathcal{M}} \supseteq \tilde{\sigma}(\tilde{\mathcal{F}})$. Mai departe deducem că $\tilde{\mathcal{M}} \supseteq \tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(\tilde{\mathcal{F}}))$. Dar conform Consecinței 1.3 [2] $\tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(\tilde{\mathcal{F}})) = \tilde{\sigma}(\tilde{\mathcal{F}})$ iar din (VII) avem că $\tilde{\sigma}(\tilde{\mathcal{F}}) = \tilde{\mathcal{A}}$. Așadar $\tilde{\mathcal{M}} \supseteq \tilde{\mathcal{A}}$ ceea ce înseamnă că $\forall\, \tilde{E} \in \tilde{\mathcal{A}}$ și $\forall\, \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$, mulțimea fuzzy $\tilde{E} \cap \tilde{F}$ este regulată.

În sfîrșit dacă $\tilde{E} \in \tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\sigma}(\tilde{\mathcal{F}})$ atunci din axioma (VII), rezultă că există $\{\tilde{F}_n\} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$ astfel ca $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n$. Deoarece $\tilde{E} = \tilde{F}_n \cap \tilde{E}$ iar $\tilde{F}_n \cap \tilde{E}$ este regulată conform raționamentului mulțimilor rezultă din Teorema 1.18 că $\tilde{E}$ este regulată. Așadar $\forall\, \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{A}}$ este regulată cu alte cuvinte $\tilde{P}$ este regulată.

1.27. **Teoremă.** Dacă $\tilde{\mathcal{A}}$ este o σ-algebră fuzzy cu nucleul $\mathcal{N}$, ce satisface axioma (S.A.F.V) și $\tilde{P}$o probabilitate fuzzy regulată interior prin raport cu sistemul $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{F}})$ atunci restricția probabilității fuzzy $\tilde{P}$ la $\mathcal{N}$, $\tilde{P}_{|\mathcal{N}}$ este o probabilitate uzuală regulată interior prin raport cu sistemul $(X, \mathcal{N}, \mathcal{F}')$ unde : $\mathcal{F}'=\tilde{\mathcal{F}} \cap \mathcal{N}$.

Demonstrație. Se observă întîi că $\mathcal{N}=\mathcal{N}'=\{B(\tilde{F}) \mid \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{A}}\}$. Într-adevăr dacă $N \in \mathcal{N}$ avem că $N=S(N)$ și $N \in \tilde{\mathcal{A}}$ deci $N \in \mathcal{N}'$. Reciproc dacă $N \in \mathcal{N}'$ atunci $N=S(\tilde{F})$, $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{A}}$ și atunci conform axiomei (S.A.F. V) rezultă că $S(\tilde{F}) \in \tilde{\mathcal{A}}$ deci $N \in \mathcal{N}$. Fie $A \in \mathcal{N}$ și notăm cu $\alpha=\sup M$, unde $M=\{\tilde{P}(\tilde{F}), \tilde{F} \subseteq A, \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}\}$ și cu $\beta=\sup N$, unde $N=\{\tilde{P}(S(\tilde{F})), S(\tilde{F}) \subseteq A, S(\tilde{F}) \in \tilde{\mathcal{F}}'\}$. Să arătăm că $\alpha=\beta$ și cum $\alpha=\tilde{P}(A)$ din $\tilde{P}(A)=\beta$ deducem că $\tilde{P}_{|\mathcal{N}}$ este o probabilitate regulată interior. Din $\tilde{F} \subseteq S(\tilde{F})$ rezultă $\tilde{P}(\tilde{F}) \subseteq \tilde{P}(S(\tilde{F}))$ deci $\alpha \leqslant \beta$. Reciproc din $N \leqslant M$ rezultă că $\sup N \leqslant \sup M$ ceea ce conduce la $\beta \leqslant \alpha$ deci $\alpha=\beta$.

1.23. **Observație.** Propoziția care urmează arată că proprietatea de numărabil subaditivitate a probabilității fuzzy este de fapt o consecință a axiomei (S.A.F. V), condiție care într-un anumit sens este mai naturală în contextul lucrării de față. În cazul cînd se renunță la axioma (S.A.F. V) problema numărabil subaditivității este deschisă.

1.29. **Lemă.** Într-o σ-algebră fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ care verifică axioma (S.A.F. IV) condițiile următoare sînt echivalente :

(a) $\forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow S(\tilde{A}) \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(b) $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow [\tilde{A}, \tilde{B}]=\{x \in X \mid \tilde{A}(x)-\tilde{B}(x) \geqslant 0\} \in \tilde{A}$.

Demonstrație. lFaptul că (a)⇒(b) rezultă din relația $1-[\tilde{A}, \tilde{B}]=S(\tilde{A} \cup \tilde{B}-\tilde{A})$ de unde avem că $[\tilde{A}, \tilde{B}] \in \tilde{\mathcal{A}}$. Reciproc din $[\tilde{0}, \tilde{B}] \in \tilde{\mathcal{A}}$ retultă că $\tilde{1}-[\tilde{0}, \tilde{B}] \in \tilde{\mathcal{A}}$. Dar $S(\tilde{B})=\tilde{1}-[\tilde{0}, \tilde{B}]$ de unde deducem că $S(\tilde{B}) \in \tilde{\mathcal{A}}$.

1.30. **Propoziție.** Orice probabilitate fuzzy $\tilde{P}$ definită pe o σ-algebră fuzzy $\tilde{\mathcal{A}}$ care satisface axiomele (S.A.F. IV) și (S.A.F.V) este numărabil subaditivă.

Demonstrație. Fie $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}}$ și notăm cu $\tilde{C}=\tilde{A} \cup \tilde{B}$. Dacă se consideră $\tilde{A}'=\tilde{A} \cap [\tilde{A}, \tilde{B}]$ și $\tilde{B}'=\tilde{B} \cap (\tilde{1}-[\tilde{A}, \tilde{B}])$ rezultă conform Lemei 1.29 că $\tilde{A}, \tilde{B}' \in \tilde{\mathcal{A}}$ și evident $\tilde{A}' \subseteq \tilde{A}$, $\tilde{B}' \subseteq \tilde{B}$. Se constată de asemenea că $\tilde{C}=\tilde{A} \cup \tilde{B}=\tilde{A}' \cup \tilde{B}'$, $\tilde{A}' \cap \tilde{B}'=\tilde{0}$ deci $\tilde{P}(\tilde{C})=\tilde{P}(\tilde{A}')+\tilde{P}(\tilde{B}') \leqslant \tilde{P}(\tilde{A})+\tilde{P}(\tilde{B})$. În continuare fie $\tilde{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n$, $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}}$ și considerăm $\tilde{B}_k=\bigcup_{j=1}^{k} \tilde{A}_j$. Atunci $\{\tilde{B}_k\}$ este un șir crescător și $\tilde{P}(\tilde{A})=\lim_{k \to \infty} \tilde{P}(\tilde{B}_k)$. Dar $\tilde{P}(\tilde{B}_k) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \tilde{P}(\tilde{A}_j)$ de unde $\tilde{P}(\tilde{B}_k) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{A}_j)$ deci $\tilde{P}(\tilde{A})=\lim_{k \to \infty} \tilde{P}(\tilde{B}_k) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{A}_j)$.

1.31. **Observaţie.** În general o probabilitate fuzzy în condiţiile axiomelor (I)—(VII) nu este regulată. Dacă presupunem că $\forall \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$, $\exists \tilde{G}_n \in \tilde{\mathcal{G}} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ astfel ca $\tilde{F} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n$ şi că sînt satisfăcute condiţiile din Teorema 1.26 atunci se observă că $\tilde{P}$ devine o probabilitate fuzzy regulată.

De asemenea este important de remarcat faptul că problema regularităţii şi conexiunile făcute în această lucrare sînt valabile pentru orice măsură pozitivă fuzzy finită.

BIBLIOGRAFIE

[1] Berberian, S. K., Measure and Imtegration, New-York, Londra (1967).

[2] Roventa, E., σ-algebre şi măsuri fuzzy, Bul. Şit. Tehn. Inst. Politehn. Timişoara (1, 1980).

[3] Smith, R. E., Measure Theory on Fuzzy Sets, Thesis, Depart. of Math. Univ. of Saskatchewan, Saskatoon Canada, (1968).

PROBABILITÉS FLOUES RÉGULIÈRES

RÉSUMÉ

Ce travail est consacré á l'étude axiomatique des probabilités floues régulières, en élargissant par analogie les raiosnnements de „Measure and Integration, New-York, London" par S. K. Berberian ; on obtient finalement des critères de régularité pour les probabilités floues.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) Fascicola 2 —1980

FUNCŢII PRIMARE PE ALGEBRE POLINOMIALE SEMISIMPLE

DE

P. N. IZVERCIAN

1. Introducere.

Printre funcţiile definite pe o algebră liniară U, asociativă, cu element unitate peste cîmpul complex o clasă importantă este formată din funcţiile care sînt extensii ale funcţiilor scalare de o variabilă complexă. Dacă $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este o funcţie scalară de o variabilă complexă, $i: \mathbb{C} \to U$ este incluziunea canonică, atunci se pune problema existenţei unei funcţii $F: U \to U$ care închide diagrama. Asemenea funcţii se numesc funcţii primare şi ele pot fi definite în mai multe moduri, în esenţă, echivalente, [1]. Scopul lucrării este studiul unor astfel de funcţii pe o clasă de algebre comutative, algebrele polinomiale semisimple, [2].

Fig. 1.

2. Extensia funcţiilor scalare.

Fie U o algebră liniară, finit dimensională, asociativă, cu element unitate peste $\mathbb{C}$, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie scalară de o variabilă complexă şi $m(z) = \prod_{i=1}^{r} (z-\lambda_i)^{s_i}$ polinomul minimal al unui element $\alpha \in U$, unde $\lambda_i \in \text{dom. } f$, $\overline{i=1,\ r}$, sînt puncte analitice pentru f.

Definiţia 2.1. Funcţia $F: U \to U$ definită prin,

$$F(\alpha) = L_{f,\,m}(\alpha) \tag{1}$$

unde $L_{f,\,m}(z)$ este polinomul unic care satisface relaţia

$$\left.\frac{d^j L_{f,\,m}(z)}{dz^j}\right|_{z=\lambda_i} = f^{(j)}(\lambda_i),\ j=\overline{0,\ s_i-1},\ \overline{i=1,\ r} \tag{2}$$

se numeşte funcţia primară generată de f.

Aici $L_{f,\,m}(z)$ este polinomul de interpolare Lagrange-Hermite iar forma sa explicită este dată în [1].

Cum $F(\alpha) \in U$ se mai spune că F este definită în $\alpha \in U$ cu valoarea funcţională $F(\alpha)$.

3. Extensia funcţiilor scalare pe algebre polinomiale.

Fie H_φ o algebră polinomială generată de un polinom de forma $\varphi = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ şi $\mathfrak{M}_\varphi$ algebra de matrice izomorfă cu H_φ peste acelaşi cîmp. Dacă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este o funcţie complexă şi $F : H_\varphi \to H_\varphi$ este o funcţie primară generată de f, atunci izomorfismul $\Omega : H_\varphi \to \mathfrak{M}_\varphi$ şi funcţia F induc o funcţie $G : \mathfrak{M}_\varphi \to \mathfrak{M}_\varphi$ definită astfel :

$$G(X) = \Omega F(\Omega^{-1} X) = \Omega F(\alpha) \tag{3}$$

unde : $\Omega(\alpha) = X$, $X \in \mathfrak{M}_\varphi$ şi $\alpha \in H_\varphi$

Observaţie. Dacă $\Omega(\alpha) = X$, elementele $\alpha \in H_\varphi$ şi $X \in \mathfrak{M}_\varphi$ admit un acelaşi polinom minimal peste $\mathbb{C}$.

Fie $\{e^i\}_{0 \leq i \leq n-1}$ o bază pentru algebra H_φ, M matricea corespunzătoare elementului „e" prin reprezentarea regulată pe algebra matrice şi $\alpha \in H_\varphi$, $\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} z_i e^i$, $z_j \in \mathbb{C}$. Atunci este clar că $\Omega(\alpha) = X = \sum_{i=0}^{n-1} z_i M^i$, $X \in \mathfrak{M}_\varphi$. Deoarece polinomul generator φ admite n zerouri distincte, algebra H_φ este semisimplă şi

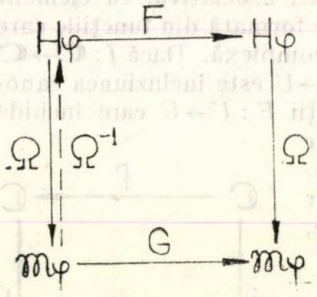


Fig. 2.

$$H_\varphi = \bigoplus_{i=1}^{n} H_i, \quad H_i \simeq \mathbb{C} \tag{4}$$

Teorema 3.1. Fie H_φ o algebră polinomială semisimplă, $H_\varphi = \oplus H_i$ şi $F : H_\varphi \to H_\varphi$ funcţia primară generată de f. Atunci există n funcţii primare generate de f, $F_i : H_i \to H_i$, astfel încît $F|_{H_i} = F_i$.

Demonstraţie. Fie $\alpha \in H_\varphi$ şi $X \in \mathfrak{M}_\varphi$ matricea corespunzătoare elementului α prin reprezentarea regulată pe algebra de matrice. Dacă $X = z_0 E + z_1 M + \ldots + z_{n-1} M^{n-1} = \omega_1 M_1 + \omega_2 M_2 + \ldots + \omega_n M_n$ unde M_i, $i = \overline{1,n}$, sînt matricele componente ale matricei M, $\omega_i = z_0 + z_1 \lambda_i + \ldots + z_{n-1} \lambda_i^{n-1}$ iar $M_i M_j = 0$ dacă $i \neq j$ şi $M_i^2 = M_i$, atunci în algebra H_φ există o bază ortogonală $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ şi $H_\varphi = \bigoplus_{i=1}^{n} H_i$. $H_i = \{\omega_i e_i \mid \omega_i \in \mathbb{C}\}$

Funcţia primară $G : \mathfrak{M}_\varphi \to \mathfrak{M}_\varphi$, generată de f, pe algebra $\mathfrak{M}_\varphi$ este definită prin :

$$G(X) = L_f, \; m(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{C_j}{\Delta} X^j \tag{5}$$

unde Δ este determinantul Wandermonde format cu valorile proprii ω_i, $i = \overline{1,n}$, ale matricei X iar C_j se obţine din Δ prin înlocuirea coloanei $j+1$ cu $f(\omega_1)$, $f(\omega_2)$, ..., $f(\omega_n)$. Însă $X^j = \sum_{h=1}^{n} \omega_h^j M_h$ şi prin urmare relaţia (5) se mai poate scrie sub forma :

$$G(X) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{h=1}^{n} C_j \omega_h^j M_h = \sum_{i=1}^{n} f(\omega_j) M_i \tag{6}$$

Cu izomorfismul invers $\Omega^{-1} : \mathfrak{M}_\varphi \to H_\varphi$ definit prin $\Omega^{-1}(E)=1$ unde E este matricea unitate iar $1 \in H$ este elementul unitate, dacă $\Omega^{-1}(X)=\alpha$, obținem că :

$$F(\alpha)=L_{f,\, m(\alpha)}=\sum_{i=1}^{n} f(\omega_i)\, e_i \tag{7}$$

unde $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ este o bază ortogonală independentă a algebrei H_φ. Dar $F(\alpha)\, e_i=f(\omega_i)\, e_i \in H_i$, $i=\overline{1,\, n}$ și deci putem defini n funcții $F_i : H_i \to H_i$, prin :

$$F_i(\alpha_i)=f(\omega_i)\, e_i,\ \alpha_i \in H_i \tag{8}$$

Funcțiile F_i, astfel definite, sînt funcții primare pe algebrele H_i, $i=\overline{1,\, n}$.

Atunci $F_i(\alpha_i)=Lf,\, m_i(\alpha_i)$, $i=\overline{1,\, n}$ și funcția primară generată de f pe algebra H_φ se mai poate scrie și sub forma :

$$F(\alpha)=Lf,\, m(\alpha)=\sum_{i=1}^{n} F(\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n} Lf,\, m_i(\alpha_i) \tag{9}$$

Observația 3.1. Izomorfismul $\Omega_i : H_i \to \mathbb{C}$ și funcția f induc pe algebra H_i o funcție unică $F_i' : H \to H$ definită prin $F'(\alpha_i)=\Omega_i f(\Omega_i^{-1}\alpha_i)=$ $=\Omega_i f(\omega_i)=f(\omega)_i\, e_i=F(\alpha_i)$, $i=\overline{1,\, n}$

Deci funcția $F_i : H_i \to H_i$ care închide diagrama, este tocmai funcția primară generată de f pe algebra H_i.

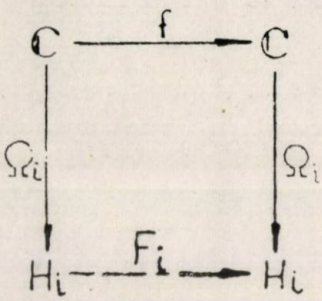


Fig. 3.

Teorema 3.2. Fie $H_\varphi=\bigoplus_{i=1}^{n} H_i$ o algebră polinomială semisimplă și $F_i : H_i \to H_i$, $i=\overline{1,\, n}$, n funcții generate de funcția f pe algebrele H_i. Atunci există o funcție primară $F : H_\varphi \to H_\varphi$, generată de funcția f.

Demonstrație. Din observația 3.1 rezultă că funcția $F_i : H_i \to H_i$, generată de f, este definită prin :

$$F_i(\alpha_i)=f(\omega_i)\, e_i=Lf,\, m_i(\alpha_i) \tag{10}$$

Atunci funcția $F : H_\varphi \to H_\varphi$, $F=F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n$, definită prin :

$$F(\alpha)=\sum_{i=1}^{n} F_i(\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n} Lf,\, m_i(\alpha_i)=Lf,\, m_1(\alpha_1)\ldots m_n(\alpha_n)=Lf,\, m(\alpha) \tag{11}$$

Prin urmare funcția F, astfel definită, este o funcție primară pe algebra H_φ, generată de funcția f, și teorema este demonstrată.

BIBLIOGRAFIE

[1] Rinehart R. F. The equivalence of definitions of a matrix function. Amer. Math. Monthly vol. 62, 1955.

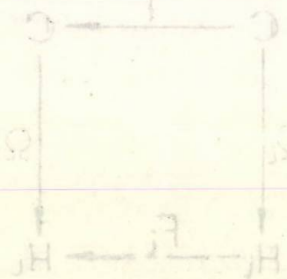
[2] Creangă I. și Enescu I. Algebre. Editura tehnică, 1973.

[3] R o s c u l e ţ M. Funcţii monogene pe algebre comutative. Editura Academiei R.S.R., 1975.
[4] I z v e r c i a n P. N. şi H o d n a g y A. Asupra unor reprezentări matriciale în probleme de vibraţii. Conferinţa „Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1978.

PRIMARY FUNCTIONS ON SEMISIMPLE POLINOMIAL ALGEBRAS

SUMMARY

The paper is abut the extensions of a scalar function with a complex variable to a semisimple polinomial algebra on the complex fiels.



Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) Fascicola 22 —1980

PROXIMITĂŢI PE SPAŢIUL PĂRŢILOR

DE

T. BANZARU

În [1], [4], [5], sînt studiate topologii şi uniformităţi pe spaţiul părţilor unui spaţiu topologic dat.

Ne propunem în prezenta lucrare să definim, plecînd de la un spaţiu proximal, o proximitate pe spaţiul părţilor şi să studiem legătura acesteia cu topologia finită.

Vom folosi în continuare notaţiile :

$\mathcal{P}(X)$ — familia tuturor submulţimilor lui X.

$\mathcal{P}_0(X)$ — familia tuturor submulţimilor nevide ale lui X.

Dacă $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu topologic, atunci prin $\mathcal{F}_0(X)$ vom înţelege familia submulţimilor închise şi nevinde din X, iar prin $\mathcal{C}(X)$ — familia submulţimilor compacte din X.

Dacă $\{A_i\}_{i\in I}$ este o familie de submulţimi ale lui X, vom nota $<A_i>_{i\in I}$, mulţimea $\{E \subset X : E \neq \varnothing,\ E \subset \bigcup_{i\in I} A_i,\ E \cap A_i \neq \varnothing,\ \forall i \in I\}$.

Definiţia 1. Dacă X este o mulţime dată, atunci o relaţie δ pe $\mathcal{P}(X)$ se numeşte proximitate pe X, dacă şi numai dacă avem :

$P_1 \cdot A\delta B \Rightarrow A\delta^{-1}B,\ \forall A,\ B \subset X$

$P_2 \cdot C\,\delta(A \cup B) \Leftrightarrow C\delta A$ sau $C\delta B$

$P_3 \cdot \{x\}\delta\{x\},\ \forall x \in X$

$P_4 \cdot \varnothing \bar{\delta} A,\ \forall A \subset X$

$P_5 \cdot A\bar{\delta}B \Rightarrow \exists\, C,\ D : A \subset C, B \subset D,\ C \cap D = \varnothing, A\bar{\delta}\,(X-C), B\bar{\delta}\,(X-D)$

Perechea (X, δ) se numeşte spaţiu proximal. Dacă P_3 este înlocuit cu

$$P_3'\ \{x\}\delta\{y\} \Leftrightarrow x = y$$

atunci δ se numeşte o relaţie de proximitate separată şi (X, δ) un spaţiu proximal separat.

Definiţia 2. Dacă (X, δ) este un spaţiu proximal, atunci o funcţie reală f definită pe $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ se numeşte funcţie de proximitate pentru δ, dacă şi numai dacă $A\delta B$ implică $f(A)\ B) = 0$ şi $A\bar{\delta}B$ implică $f(A, B) = 1$.

Teorema 1. Funcţia de proximitate f într-un spaţiu proximal (X, δ) satisface următoarele proprietăţi :

$F_1 \cdot f(A, B) = f(B, A),\ \forall A,\ B \subset X$

$F_2 \cdot f(A \cup B, C) = \min(f(A, C), f(B, C)), \forall A,\ B,\ C \subset X$

$F_3 \cdot f(\{x\}, \{x\}) = 0, \ \forall x \in X$

$F_4 \cdot f(A, \varnothing) = 1, \ \forall A \subset X$

$F_5 \cdot f(A, B) = 1 \Rightarrow \exists C, D : A \subset C, B \subset D, C \cap D = \varnothing, f(A, X - C) = f(B, X - D) = 1$

Dacă spațiul (X, δ) este separat, atunci funcția f satisface condiția :

$F_3' \ f(\{x\}, \{y\}) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Reciproc, dacă pentru o mulțime arbitrară X este dată o funcție $f : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$, cu proprietățile $F_1 - F_5$, atunci relația $\delta \subset \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$: $A \delta B \Leftrightarrow f(A, B) = 0$, $A, B \subset X$, este o relație de proximitate pe X, pentru care f este funcția de proximitate.

Teorema 2. Dacă (X, δ) este un spațiu proximal, atunci relația $\Delta \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, definită de $\mathcal{A} \Delta \mathcal{B}$ dacă și numai dacă oricare ar, fi familia finită de submulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X : (X - A_k) \bar{\delta} B_k, \ k \in \overline{1, n}$ $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = X \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}, \ B \in \mathcal{B}$, astfel ca $(A, B) \in \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} < A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n} >^2$ este o proximitate pe $\mathcal{P}(X)$.

Demonstrație.

P_1. Este evidentă.

$P_2 \cdot \mathcal{C} \Delta (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \Leftrightarrow \forall A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X : X - A_k \bar{\delta} B_k, \ k \in \overline{1, n}, \bigcup_{k=1}^{n} B_k = X,$

$\exists C \in \mathcal{C}, \ \exists D \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} : (C, D) \in \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} < A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n} >^2 \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{C},$

$\exists D \in \mathcal{A} \vee D \in \mathcal{B} : (C, D) \in \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} < A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n} >^2 \Leftrightarrow \mathcal{C} \Delta \mathcal{A} \vee \mathcal{C} \Delta \mathcal{B}.$

P_3. $\{A\} \Delta \{A\}, \forall A \in \mathcal{P}_0(X)$. Într-adevăr, $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X : X - A_k \bar{\delta} B_k,$ $k \in \overline{1, n}, \bigcup_{k=1}^{n} B_k = X \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$. Fie acum $A \in \mathcal{P}_0(X)$ și să notăm cu $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}$ mulțimile din familia $\{A_i\}, \ i \in \overline{1, n}$ disjuncte de A. Evident, atunci $(A, A) \in < A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p} >^2$ și cu aceasta proprietatea P_3 este demonstrată.

P_4. $\varnothing \bar{\Delta} \mathcal{A}, \forall \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, deoarece $\forall A \in \mathcal{A}, \ \exists A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X :$ $: X - A_k \bar{\delta} B_k, \ k \in \overline{1, n}, \bigcup_{k=1}^{n} B_k = X : (\varnothing, A) \notin \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} < A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n} >^2$.

P_5. $\mathcal{A} \bar{\Delta} \mathcal{B} \Rightarrow \exists \mathcal{C}, \mathcal{D} : \mathcal{A} \subset \mathcal{C}, \ \mathcal{B} \subset \mathcal{D}, \ \mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \varnothing, \ \mathcal{A} \bar{\Delta} (\mathcal{P}(X) - \mathcal{C}),$ $\mathcal{B} \bar{\Delta} (\mathcal{P}(X) - \mathcal{D})$.

Într-adevăr, fie $\mathcal{C} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \left(\bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} < A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_n >^2 \right)$ (A),

$$\mathcal{D} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \left(\bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} < A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n} >^2 \right) \text{(B)}.$$

Avem $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ și $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$, deoarece $\forall A \in \mathcal{A}$ implică conform proprietății P_3, $(A, A) \in \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} <A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}>^2$. Deci $A \in \mathcal{C}$. Așadar $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Analog, $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$.

Avem de asemenea $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \varnothing$, deoarece în caz contrar $\exists F \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{D}$. Aceasta implică $\exists A_1' \in \mathcal{A}$, $\exists B_1' \in \mathcal{B}$:

$$F \in \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} <A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}>^2 (A_1'),$$

$$F \in \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} <A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}>^2 (B_1')$$

Ținînd seama de faptul că $X - A_k \,\overline{\delta}\, B_k$, $k \in \overline{1, n}$; $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = X$, obținem : $(A_1', B_1') \in \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} <A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}>^2$. Aceasta contrazice ipozeta, ceea ce este absurd.

Să arătăm acum că $\mathcal{A}\,\overline{\Delta}\,(\mathcal{P}(X) - \mathcal{C})$. Într-adevăr, fie $A \in \mathcal{A}$, $S \in \mathcal{P}(X) - \mathcal{C}$. Aceasta este echivalent cu $A \in \mathcal{A}$, $S \notin \mathcal{C}$ și deci $A \in \mathcal{A}$, $S \notin \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} <A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}>^2$ (A). De aici avem $(A, S) \notin \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} <A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}>^2$.

Analog se arată că $\mathcal{B}\,\overline{\Delta}\,(\mathcal{P}(X) - \mathcal{D})$. Cu aceasta am demonstrat că Δ este o relație de proximitate pe $\mathcal{P}(X)$.

Relația Δ definită pe $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ cu ajutorul relației δ pe $\mathcal{P}(X)$ ca și în teorema 2, o vom numi în cele ce urmează, proximitatea indusă pe $\mathcal{P}(X)$ de proximitatea δ pe X.

Fie acum $\mathcal{T}_\delta$ și $\mathcal{T}_\Delta$ topologiile generate de δ pe X, respectiv de Δ pe $\mathcal{P}(X)$. Avem atunci :

Lema 1. Dacă (X, δ) este un spațiu proximal și $E \in \mathcal{P}_0(X)$, atuncl următoarele afirmații sînt echivalente :

1.1. Orice $\mathcal{T}_\Delta$ vecinătate a lui E conține o vecinătate a lui E în topologia finită generată de $\mathcal{T}_\delta$ pe $\mathcal{P}_0(X)$.

1.2. Oricare ar fi A_k, $k \in \overline{1, m}$: $X - A_k \,\overline{\delta}\, B_k$, $\bigcup_{k=1}^{m} B_k = X$, $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$: $: E \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times A_k)(x_i) \right)$.

Demonstrație. 1.1. $\Rightarrow$1.2. Într-adevăr, din 1.1. rezultă că există o vecinătate a lui E în tolpologia finită pe $\mathcal{P}_0(X)$ generată de $\mathcal{T}_\delta$, conținută în $\bigcup_{k_1, k_2, \ldots, k_m = 1}^{m} <A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, S_{k_m}>^2$ (E). Deci există $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{T}_\delta$: $< <U_1, U_2, \ldots, U_n> \ni E$ și $<U_1, U_2, \ldots, U_n> \subset \bigcup_{k_1, k_2, \ldots, k_m = 1}^{m} <A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_m}>^2$ (E) $= < \bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times A_k)(x) >_{x \in E}$.

Fie $x_i \in U_i \cap E$, $i \in \overline{1, n}$. Dacă $x \in E$, atunci $\exists\, i=i_0 : U_{i_0} \subset \bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times A_k)(x)$.

Aceasta atrage $x_{i_0} \in \bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times A_k)(x)$ și deci, $x \in \bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times A_k)(x_{i_0})$. Cum x a fost element arbitrar din E, rezultă : $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times A_k)(x_i) \right)$.

1.2. $\Rightarrow$ 1.1.

Fie $\bigcup_{k_1, k_2, \ldots, k_m=1}^{m} <A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_m}>^2 (E)$ o $\mathcal{T}_\Delta$ vecinătate a lui E, unde $X - A_k \,\overline{\delta}\, B_k$, $k \in \overline{1, m}$, $\bigcup_{k=1}^{m} B_k = X$. Să alegem acum C_j, $j \in \overline{1, p}$, $X - C_j \,\overline{\delta}\, D_j$, $j \in \overline{1, p}$, $\bigcup_{j=1}^{p} D_j = X$ astfel ca $(u, w) \in \bigcup_{j=1}^{p} (C_j \times C_j)$, $(w, v) \in \bigcup_{j=1}^{p} (C_j \times C_j)$ să implice $(u, v) \in \bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times A_k)$. Din ipoteză $\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in E : \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{p} (C_j \times C_j) \cdot (x_i) \supset E$. Deci pentru orice $x \in E$, $\exists\, i=i_0$ astfel ca $x \in \bigcup_{j=1}^{p} (C_j \times C_j)(x_{i_0})$. Fie acum $y \in \bigcup_{j=1}^{p} (C_j \times C_j)(x_{i_0})$. Rezultă că $(y, x_{i_0}) \in \bigcup_{j=1}^{p} (C_j \times C_j)$. Dar $(x_{i_0}, x) \in \bigcup_{j=1}^{p} (C_j \times C_j)$. Prin urmare, $(y, x) \in \bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times A_k)$. Așa dar $x \in \bigcup_{j=1}^{p} (C_j \times C_j) \cdot (x_{i_0}) \subset \bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times A_k)(x)$. Aceasta atrage că $< \bigcup_{j=1}^{p} (C_j \times C_j)(x_1), \bigcup_{j=1}^{p} (C_j \times C_j) \cdot (x_2), \ldots, \bigcup_{j=1}^{p} (C_j \times C_j)(x_n) >$ este o vecinătate a lui E în topologia finită generată de $\mathcal{T}_\delta$ și este conținută în $< \bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times A_k)(x) >_{x \in E} = \bigcup_{k_1, k_2, \ldots, k_n=1}^{m} < <A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_m}>^2 (E)$.

Lema 2. Dacă (X, δ) este un spațiu proximal și $E \in \mathcal{P}_0(X)$, atunci următoarele afirmații sînt echivalente :

2.1. Orice vecinătate a lui E în topologia finită generată de $\mathcal{T}_\delta$ pe $\mathcal{P}_0(X)$ conține o $\mathcal{T}_\Delta$ vecinătate a lui E.

2.2. Dacă $F \in \mathcal{P}_0(X)$, $X - F \in \mathcal{T}_\delta$, $F \cap E = \varnothing$, atunci există $A_1, A_2, \ldots, A_m$, $X - A_k \,\overline{\delta}\, B_k$, $k \in \overline{1, m}$, $\bigcup_{k=1}^{m} B_k = X$, astfel ca : $\left(\bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times A_k)(E) \right) \cap F = \varnothing$.

Demonstrație.

2.1. $\Rightarrow$ 2.2.

Fie $E, F \in \mathcal{P}_0(X)$, $X - F \in \mathcal{T}_\delta$, $F \cap E = \varnothing$. Atunci $<X - F>$ este o vecinătate a lui E în topologia finită generată de $\mathcal{T}_\delta$. Așadar, există conform ipotezei $X - A_k \,\overline{\delta}\, B_k$, $k \in \overline{1, m}$, $\bigcup_{k=1}^{m} B_k = X$, astfel ca $<X - F> \subset \bigcup_{k_1, k_2, \ldots, k_m=1}^{m} < <A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_m}>^2 (E)$. Atunci $\bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times A_k)(E) \subset X - F$ și deci $\bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times A_k)(E) \cap F = \varnothing$.

2.2.$\Rightarrow$2.1.

Fie $<U_1, U_2, \ldots, U_n>$o $2^{\mathcal{T}\delta}$ vecinătate a lui E și A_k, $k \in \overline{1, m}$ astfel ca $X - A_k \overline{\delta} B_k$, $k \in \overline{1, m}$, $\bigcup_{k=1}^{m} B_k = X$, $\bigcup_{k=1}^{m} (A_k \times A_k)(E) \cap \left(X - \bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) = \varnothing$.

Fie $x_i \in U_i \cap E$, $i \in \overline{1, n}$ și $X - C_j \overline{\delta} D_j$, $j \in \overline{1, p}$, $\bigcup_{j=1}^{p} D_j = X : \bigcup_{j=1}^{p} (C_j \times C_j)(x_i) \subset$ $\subset U_i$. Punînd $A_{kj} = A_k \cap C_j$, $k \in \overline{1, m}$, $j \in \overline{1, p}$, avem : $\bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{p} (A_{kj} \times A_{kj}) \cdot$ $\cdot(E) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ și $\bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{p} (A_{kj} \times A_{kj})(x_i) \subset \bigcup_{j=1}^{p} (C_j \times C_j)(x_i) \subset U_i$. Așa dar $< \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{p} (A_{kj} \times A_{kj})(x) >_{x \in E} \subset <U_1, U_2, \ldots, U_n>$.

Teorema 3. Dacă (X, δ) este un spațiu proximal, atunci topologia finită generată de $\mathcal{T}_\delta$ și $\mathcal{T}_\Delta$ coincid pe $\mathcal{C}(X) \subset \mathcal{P}_0(X)$.

Demonstrație. Dacă $E \subset X$ este compactă în $\mathcal{T}_\varepsilon$ atunci E satisface condițiile 1.2. și 2.2. din lemele 1 și 2 și prin urmare au loc 1.1. și 2.1., ceea ce demonstrează teorema.

Consecință. Spațiul proximal (X, δ) este compact, dacă și numai dacă spațiul $(\mathcal{F}_0(X), \mathcal{T}_\Delta)$ este compact.

Într-adevăr, se știe că X este compact dacă și numai dacă $\mathcal{F}_0(X)$ este compact. Cum părțile închise ale unei spațiu compact sînt compacte, teorema precedentă justifică consecința enunțată.

BIBLIOGRAFIE

1. Michael E., Topologies on spaces of subsets, Trans. Am. Math. Soc. 71, 1951, pp. 152–182.
2. Smirnov I., On proximity spaces, Math. Sb. 1952, v. 31 (73), pp. 543–574.
3. Thron W. J., Topological structures, Holt Rinehart, 1966.
4. Bânzaru T., Crivăț N., Structures uniformes sur l'espace des parties d'un espace uniforme et quasicontinuité des applications multivoques, Bul. șt. și tehn. al Inst. politeh. „Traian Vuia" Timișoara, Seria Mat. fiz. mec. teor. și aplicată, t. 20 (34), fasc. 2, 1975.
5. Bânzaru T., Asupra C-topologiei spațiului părților, Bul. șt. și tehn. al Inst. politeh. „Traian Vuia" Timișoara, Seria mat-fiz, t. 25 (40), fasc. 1, 1979.

PROXIMITIES ON THE SPACE OF SUBSETS

ABSTRACT

In the present paper a proximity function for a proximity space is introduced, which can characterize the proximity of sets with proprieties F_1–F_5; next, by Theorem 2, one prives that a proximity relation on X induces a proximity on $\mathcal{P}(X)$.

This proximity Δ on $\mathcal{P}(X)$, induces a topology $\mathcal{T}_\Delta$ on $\mathcal{P}(X)$, which, is proved (Theorem 3), by using lemas 1 and 2, that it coincided, on $\mathcal{C}(X)$ (the family of compact sets for X) with the finite topology [1] generated by $\mathcal{T}_\delta$ tolpology on X.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 25 (39) **Fascicola 2 —1980**

DESPRE CONJUGAREA K- SPAŢIILOR PRIN FORME SESQUILINIARE

DE

N. BOJA, G. BRĂILOIU

În această notă, teoria formelor sesquiliniare | 5 | este aplicată la operaţia de conjugare a spaţiilor vectoriale peste un corp K, şi o teoremă a lui Ribenboim | 7 | este extinsă în acest caz. De asemenea, se consideră conjugarea unui cuplu de K — spaţii stîng — drept, $<U, V>$, în afara conjugării canonice a unui spaţiu stîng cu dualul său, menţionată în | 6 |. Pentru a face posibilă o structurare de spaţiu pseudo-euclidian, care în final este scopul acestui articol, se introduce un endomorfism pe un K — spaţiu considerat, sau pe ambele, descris în prima parte a acestei note.

Se ştie că aceste elemente stau la baza studiului geometric al spaţiilor liniare (în cadrul disciplinei matematice recent conturate — prin lucrările | 1 |, | 2 |, | 6 |, | 7 |, ş.a. — *algebra geometrică*). Dar, pentru un studiu geometric în probleme de convexitate sînt necesare noţiuni de semidreaptă, segment, operatori algebrici de închidere, semispaţii închise, de separare a două mulţimi, de contact etc. În consecinţă pentru un K — spaţiu vectorial V arbitrar se cere să se impună lui K condiţii restrictive :

a) K — să fie corp ordonat (*ex*, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, k (l) — unde k este corp ordonat, ...)
b) K — să fie supracorp al lui $\mathbf{R}$ (ex : $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$, ...)
c) K — să fie valuat nearhimedian (ex : Q_p ...).

Unele dintre aceste corpuri sînt comutative, iar altele nu ; unele sînt dotate cu automorfisme (identitate, ex : $\mathbf{R}$; interior, ex : $\mathbf{C}$)

$$J : K \to K ; \quad J(\alpha) = \alpha^J$$

pentru care

$$(\alpha+\beta)^J = \alpha^J + \beta^J \text{ şi } (\alpha\cdot\beta)^J = \alpha^J \cdot \beta^J$$

iar altele cu antiautomorfisme J (ex ; $\mathbf{H}$, ...) pentru care

$$(\alpha+\beta)^J = \alpha^J + \beta^J \text{ şi } (\alpha\cdot\beta)^J = \beta^J \cdot \alpha^J$$

În raport cu aceste situaţii lucrarea îşi propune să rezolve unele aspecte.

1°. Fie U un spaţiu vectorial stîng, V un spaţiu vectorial drept, peste acelaşi corp K. Pentru $\forall A \in U$ se defineşte o aplicaţie a lui V în K ($V \xrightarrow{\varphi_A \#} K$).

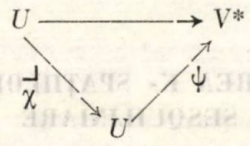
$$\varphi_A \# = (\psi \circ \overset{\lrcorner}{\chi})(A) \tag{1}$$

unde $\overset{\lrcorner}{\chi}$ este un epimorfism (endomorfism surjectiv) al spaţiului U, determinat prin acţiunea afinorului α_φ peste toate elementele sale

$$A \to \alpha_\varphi A = A\# \tag{2}$$

și $\psi : U \to V^*$ ($V^* = \mathrm{Hom}\,(V.\ K)$ este o aplicație liniară injectivă (monomorfism) relativă la automorfismul identic al lui K, sau o aplicație semiliniară relativă la un automorfism interior sau la un antiautomorfism J al corpului K.

Aplicarea ψ atașează la orice imagine prin $\overset{\lrcorner}{\chi}$ a lui A, aplicația $\varphi_A\#$, corespunzătoare diagramei comutative



(3)

și are proprietățile :

$$\psi\,(A^\# + B^\#) = \psi\,(A^\#) + \psi\,(B^\#)\ ;\quad A,\ B \in \cup$$

$$\psi\,(\lambda A^\#) = \lambda^J\ \psi\,(A^\})\ ;\ \lambda \in K \quad \text{sau} \tag{4}$$

$$\psi\,(\lambda A^\#) = \psi\,(A^\#)\ \lambda^J\ ;\quad \lambda \in K^\circ.$$

Dacă corpul K este finit, aplicația $J : K \to K$ nu poate fi decît automorfismul identic al lui K ; dacă $K = \mathbf{H}$ — corpul cuaternionilor, aplicația $J : K \to K$, prin $J\,(\alpha) = \bar{\alpha}$ — cuaternionul conjugat lui $\alpha \in H$, este un antiautomorfism. Idem pentru $K = \mathbf{C}$ și aceleași J.

Se poate verifica următoarea propoziție :

Aplicația $A \to \varphi_A\#$ definită de (1) este o aplicație semiliniară de la $V \to K$, relativă la J.

Aceasta rezultă din compunerea lui $\overset{\lrcorner}{\chi}$ cu ψ pe baza proprietăților acestora.

Notăm prin

$\hat{V} = \{\psi\,(\overset{\lrcorner}{\chi}\,(A)) = \varphi_A\#,\ \forall\ A \in U\}$; din cele de mai sus rezultă că $\hat{V}$ este subspațiu liniar al lui V. Avem atunci

$$\varphi_A\#\,(X+Y) = \varphi_A\#\,(X) + \varphi_A\#\,(Y) \tag{5}$$

$$\varphi_A\#\,(X\beta) = \varphi_A\#\,(X)\beta$$

Rezultă deci, că $\varphi_A\#$ este liniară, deoarece $\varphi_A\# \in V^*$, $V^* = \mathrm{Hom}\,(V,\ K)$.

Să considerăm acum conjugarea canonică a lui V și $\hat{V}$ în K ; în acest caz, punînd

$$\varphi_A\#\,(X) = A^\# X,\ \forall\ X \in V \tag{6}$$

aplicația φ, care realizează conjugarea, definită prin

$$\varphi\,(\varphi_A\#,\ X) = <\psi\,(A^\#),\ X> = \varphi_A\#\,(X), \tag{7}$$

datorită relațiilor (5) și a proprietății de semiliniaritate a funcției ψ, verifică relațiile din definiția formelor sesquiliniare dată în | 5 |, și, deci, φ este o formă sesquiliniară la stînga pentru J. Aplicația semiliniară ψ este corelația lui U pe $\hat{V}$, iar forma sesquiliniară asociată φ, este nedegenerată.

Teorema 1.

Următoarele condiții sînt echivalente :

(a) $<\hat{V},\ V>_\varphi$ este un cuplu de K spații conjugate (prin φ) ;

(b) $\varphi_A\# : V \to K$ este un homomorfism,

(a) $\Rightarrow$ (b) : Primele condiții ale conjugării

1° $\varphi(\varphi_A\#, X+Y)=\varphi(\varphi_A\#, X)+\varphi(\varphi_A\#, Y)$

2° $\varphi(\varphi_A\#, X\lambda)=\varphi(\varphi\#, X)\lambda$

scrise cu (6)

(8) $A\#(X+Y)=A\#X+A\#Y$

$A\#(X\lambda)=(A\#X)\lambda$

arată că aplicația $\varphi_A\#$ este un homomorfism deoarece (8) sînt echivalente cu (5).

(b)$\Rightarrow$(a) ; Dacă $\varphi_A\# \in \mathrm{Hom}(V, K)$, relațiile (5) au loc și sînt echivalente cu 1° și 2°.

Pe de altă parte, ψ are proprietățile (4), fapt care conduce la relațiile

$$\varphi_{A\#+B\#}=\varphi_{A\#}+\varphi_{B\#},\quad \varphi_{\alpha A\#}=\alpha^J\varphi_{A\#}$$

și de aici cu (6) și (7) se obține

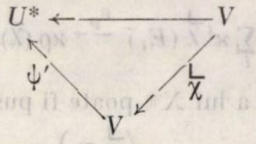
3° $\varphi(\varphi_{A\#}+\varphi_{B\#}, X)=\varphi(\varphi_{A\#+B\#}, X)=\varphi_{A\#+B\#}(X)=(\varphi_{A\#}+\varphi_{B\#})(X)=$

$=\varphi_{A\#}(X)+\varphi_{B\#}(X)=\varphi(\varphi_{A\#}, X)+\varphi(\varphi_{B\#}, X)$

4° $\varphi(\alpha^J\varphi_{A\#}, X)=\varphi(\varphi_{\alpha A\#}, X)=<\psi(\alpha A\#), X>=\alpha^J<\psi(A\#), X>=$

$=\alpha^J\varphi(\varphi_{A\#}, X).$

Invers, compunerea aplicațiilor arătate în diagrama



(3')

atașează la $\forall B \in V$ o funcțională $\varphi'_{B\#} \in \mathrm{Hom}(U, K)$, unde U^* este un spațiu vectorial drept peste K, și, scriind $\varphi'_{B\#}(X)=X\varphi'_{B\#}$, dacă $X \in U$, avem

$$X\varphi'_{B\#}=XB^{\#} \tag{6'}$$

cu

$$B^{\#}=B\alpha_{\varphi} \leftarrow\!\!- B \tag{2'}$$

Perechea $U, \hat{U} \subseteq U^*$ va fi un cuplu $<U, \hat{U}>_{\varphi'}$, de K-spații conjugate deoarece

$$\varphi'(X, \varphi'_{B\#})=<X, \psi'(B^{\#})>=X\varphi'_{B\#} \tag{7'}$$

este o formă sesquiliniară.

2° Vom caracteriza afinorul α_{φ} prin matricele

$$\overset{\lrcorner}{a}{}^{k}_{\varphi i}=\delta^k_i\ \overset{\lrcorner}{\varepsilon}_i\ (i \in I) \qquad \overset{\llcorner}{a}{}^{k}_{\varphi j}=\delta^k_j\ \overset{\llcorner}{\varepsilon}_j\ (j \in J)$$

corespunzător modului în care acesta definește unul din epimorfismele $\overset{\lrcorner}{\chi}, \overset{\llcorner}{\chi}$, unde $\varepsilon_\alpha \in \{\overset{\lrcorner}{\varepsilon}_i, \overset{\llcorner}{\varepsilon}_j\}$ este $\varepsilon_\alpha=[+1] \vee [-1]$.

Efectuînd produsul de forma $\overset{\lrcorner}{\varepsilon_i}\,\overset{\llcorner}{\varepsilon_j}$, acesta există numai dacă fiecare indice $i, j \leqslant \#$ diag α_φ.

Fie U și V două module libere (peste K) cu bazele E și F, și x și y — matricele coordonatelor avînd elemente diferite de zero doar pentru un număr finit de indici I, $J \subset Z_+$. Presupunem că din $U=r$, din $V=s$. Convenim ca în cazul unui spațiu vectorial stîng, matricea E a vectorilor bazei să fie matrice coloană și matricea $\varkappa$ a coordonatelor vectorului X în această bază, matrice linie ; în cazul unui spațiu vectorial drept, invers.

Punînd

$$\sum_k \overset{\lrcorner}{a}{}^k_{\varphi i} E_k = E_i^* \qquad \sum_k F_k \overset{\lrcorner}{a}{}^k_{\varphi j} = F_j^*$$
$$(i,\ k \in I_r \subseteq I) \qquad (j,\ k \in J_s \subseteq J)$$

pentru $X \in U$ și $Y \in V$ avem

$$X^\# = \alpha_\varphi \left(\sum_i x^i E_i\right) = x \left(\| \overset{\lrcorner}{a}{}^k_{\varphi i} \| E\right) = x E^\# \tag{9}$$

$$Y^\# = \left(\sum_j F_j y^j\right) \alpha_\varphi = \left(F \| \overset{\llcorner}{a}{}^k_{\varphi j} \|\right) y = F^\# y$$

Considerăm acum izomorfismul

$$\theta_\rho : U \to K^r \quad (r = \dim U)$$

asociat reprezentării ρ și definit prin

$$\theta_\rho (E_1) = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

avem :

$$X^\# = \overset{\lrcorner}{\chi}(X) = \overset{\lrcorner}{\chi}\left(\sum_i \varkappa^i E_i\right) = \sum_i \varkappa^i \overset{\lrcorner}{\chi}(E_i) \xrightarrow{\theta_\rho} \varkappa \rho \left(\overset{\lrcorner}{\chi}\right) U_n = (\varkappa^1 \overset{\lrcorner}{\varepsilon}_1, \ldots,\ \varkappa^r \overset{\lrcorner}{\varepsilon}_r).$$

Astfel, imaginea prin $\theta\rho$ a lui $X^\#$ poate fi pusă în K^r sub forma $xE^\#$ unde

$$E^\# = \begin{pmatrix} \overset{\lrcorner}{\varepsilon}_1 E_1 \\ \vdots \\ \overset{\lrcorner}{\varepsilon}_r E_r \end{pmatrix}$$

În mod analog, cu izomorfismul

$$\theta'_{\rho'} : V \to K^s \quad (s = \dim V)$$

definit prin

$$\theta'_{\rho'}(F_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

avem

$$Y^\# = \overset{\llcorner}{\chi}(Y) = \overset{\llcorner}{\chi}\left(\sum F_j y^j = \sum \overset{\llcorner}{\chi}(F_j)\, y^j \xrightarrow{\theta'\rho'} U_n \rho' \left(\overset{\llcorner}{\varkappa}\right) y = \begin{pmatrix} \overset{\llcorner}{\varepsilon}_1 y^1 \\ \vdots \\ \overset{\llcorner}{\varepsilon}_s y^s \end{pmatrix}.$$

Astfel, imaginea prin $\theta'\rho'$ a lui Y poate fi pusă în K^s sub forma $F^\# y$, unde $F^\# = (F_1 \overset{\llcorner}{\varepsilon}_1, \ldots, F_s \overset{\llcorner}{\varepsilon}_s)$

3° Revenind la conjugarea $<U,\ V>_\varphi$, obținem că pentru $\forall\, X \in U$

$$\psi\,(X^{\#}) = \sum_i \varkappa_i^J\, \psi\,(E_i^{\#}) = \sum_{i,\,k} \varkappa_i^J\, a_{ik}\, F^{*k}$$

și de aici

$$a = \alpha_\varphi^J\, \alpha \tag{10}$$

unde α (matricea lui ψ) este definită peste K, ca fiind

$$\| \alpha_{ki} \| = \| <\psi\,(E_i^{\#}),\ (F_k^*)^*> \| = \| <\psi\,(E_i^{\#}),\ F_k> \|$$

Atunci, pentru $Y \in V$, formula (7) ne dă

$$\varphi\,(\varphi_X{}^{\#},\ Y) = x^J a y \tag{11}$$

deoarece $F^*F = 1_r = \| \delta_i^k \|$. Evident $r \leqslant s$.

Similar se procedează în cazul conjugării $<U,\ V>\varphi'$, unde $r \geqslant s$ și $E\,E^* = 1_s = \| \delta_j^k \|$, obținînd

$$\varphi'\,(X,\ \varphi'_k{}^{\#}) = x b y^J \tag{11'}$$

unde

$$b = \beta \alpha_\phi^J \text{ și } \| \beta_{kj} \| = \| <E_j,\ \psi'\,(F_k^{\#})> \| \tag{10'}$$

Aici $\hat{U}$ și $\hat{V}$ sînt presupuse definite peste K, ținînd cont că primul este drept și al doilea stîng.

În particular (utilizînd limbajul formelor) dacă considerăm conjugarea $<V^*,\ V>_\varphi$

$$(X,\ Y) \to \varphi\,(X,\ Y) = <\varphi_X{}^{\#},\ Y>$$

prin forma sesquiliniară $\varphi : V \times V \to K$ asociată aplicației semiliniare $\psi : V \to V^*$ relativă la antiautomorfismul J a lui K, dacă ψ este identitatea pe V, se obține conjugarea canonică (| 1 |, | 7 |) la care ne-am referit în introducere. Dar pentru $\overset{\lrcorner}{\chi} \neq 1_V$ (ales ca în 2°) cu ajutorul formei φ se poate introduce o structură metrică pe V, care devine spațiu „semipseudoeuclidian" drept peste K.

Pentru conjugarea $<U,\ U^*>_{\varphi'}$, forma sesquiliniară φ' care realizează conjugarea dată prin

$$(X,\ Y) \to \varphi'\,(X,\ Y) = <X,\ \varphi'_Y{}^{\#}>$$

este definită pe $U \times U$ și atașată aplicației semiliniare $\psi : U \to U^*$. În acest fel U poate fi structurat ca un spațiu „semipseudoeuclidian" stîng peste K.

4° Dacă V este transformat canonic într-un spațiu bilateral peste K, atunci se știe din | 1 | că aceasta este posibil numai dacă K este comutativ. Pe de lată parte , comutativitatea lui K ne permite să punem expresia (9) sub forma

$$X^{\#} = \sum_i (x^i \overset{\lrcorner}{\varepsilon^i})\, E_i \tag{9'}$$

$$Y^{\#} = \sum_j F_j\, (\overset{\lrcorner}{\varepsilon^j} y^j)$$

unde $\varepsilon_\alpha = \varepsilon^\alpha$ deoarece indicii liniei și ai coloanei sînt identici pentru elemente diferite de zero $\| a_{\varphi\alpha}^k \|$.

Cu aceasta, și considerînd J ca identitate pe K, formele φ și φ' coincid și le scriem „f".

Avem din | 3 |

Teorema 2.

Aplicația :

$$f : (\varphi_A\#,\ \varphi'_B\#) \longrightarrow A\#B\# \in K \tag{12}$$

este o formă biliniară.

Forma biliniară f este unic determinată de formele φ și φ', deoarece se știe că orice formă biliniară poate fi generată prin produsul a două forme liniare.

$$\varphi_A\# : V \to K, \qquad \varphi'_B\# : U \to K$$

dată prin aplicația

$$\varphi_A\# \varphi_B\# : U \times V \to K$$

Atunci (12) poate fi considerată ca o aplicație care realizează conjugarea lui U cu V în K. Aplicațiile $\varphi_A\#$ și $\varphi_B\#$ au același rang și rangul lor este egal cu rangul formei f.

În cazul că V este transformat canonic într-un spațiu bilateral așa cum a fost stabilit cu ajutorul formelor, se poate substitui U prin V în toată procedura dinainte. Spațiul V avînd o astfel de structură metrică, va constitui un spațiu pseudoeuclidian de indice l, unde l este numărul produselor pozitive ce apar în orice element a lui $<V, V>_f$, cu $\overset{\lrcorner}{\varepsilon^i}\ \overset{\llcorner}{\varepsilon^i} = \varepsilon^i$ și, se pot aranja astfel ca

$$\varepsilon^i = \begin{cases} +1, & i \leqslant l \\ -1, & i > l \end{cases}$$

eventual, făcînd o nouă permutare a bazei spațiului V.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Artin — Geometriceskaya Algebra, Izd. „Nauka". Moskva, 1969.
2. J. Bair, R. Fourneau — Introduction a l'ètude geometrique des espaces vectoriales, Liège, 1974.
3. N. Boja, — „Non-euclidean spaces from the algebraic point of view", Rend. di Matem. Roma, (1972), (4), vol, VI, pp. 773—784.
4. N. Boja — A method of introducing non-euclidian Q_p — spaces. Bul. St. Tehn. I.P.T. Seria Mat — Fiz — Mec, Timișoara, Tom. 22 (36), Fasc 1, 1977.
5. N. Bourbaki, — „Formes sesquilinéares et formes quadratiques". Algèbre, Chap 9, Paris, 1959.
6. J. Dieudonné, — „La géométrie des groupes classiques", Springer Verlag, Berlin, 1955.
7. P. Ribenboim, — „Rings and Modules", New York, London, 1967.

ON THE CONJUGATION OF K-SPACES THROUGH SESQUILINEAR FORMS

SUMMARY

In this note the theory of the sesquilinear forms /6/ is applied to the operation of conjugation of the vectorial spaces over a K field and a Ribenboim theorem /7/ is extended for this case. There is also considered the conjugation of a left-right arbitrary couple of K-spaces $<U, V>$, outside the canonic conjugation of a right spaces with its dual, mentioned in /6/. Moreover, to make possible a structure of pseudo-euclidean space, which is the final aim of this paper, we introduce an endomorphism of one of the K-spaces considered, or of both spaces, described in the first part of the note.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 25 (39) **Fascicola 2 —1980**

ASUPRA ECUAŢIEI INTEGRALE $\int_{\beta(x)}^{x} z(x, y)\, g(y)\, dy = q(x)$ $[z_1(x, y) = z(x, y)]$ (UNELE APLICAŢII ÎN TEHNICĂ)

DE

C. MILICI, L. VUC, N. RACHIN

1. Ecuaţie.

Această ecuaţie de tip Voltera de prima speţă studiată de către Goursat, Picard etc. reluată apoi din punct de vedere al ecuaţiilor funcţionale iterative de către C. Popovici [1] admite o soluţie unică dacă $z(x, y)$ este integrabilă şi nu admite nici o soluţie dacă $Q = \sum q^n(x)$; $q^n(x) = q(\beta^n(x))$; $\beta^n(x) = \beta(\beta^{n-1}(x))$ este divergentă şi $Q(\zeta) \neq 0$ unde $\zeta = \lim_{n\to\infty} \beta^n(x)$.

Dacă notăm $f(x) = \int_{\zeta}^{x} z(x, y)\, g(y)\, dy$ atunci ecuaţia funcţională poate fi scrisă

$$f(x) - f(\beta(x)) = q(x) \tag{1}$$

sau

$$f(\beta(x)) = f(x) - q(x) \tag{1'}$$

a cărei soluţie formală poate fi dedusă astfel [2]

$$f(x) = f^{-1}(x) - q^{-1}(x)$$
$$f^{-1}(x) = f^{-2}(x) - q^{-2}(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(x) = -q^{-1}(x) - q^{-2}(x) - \ldots - q^{-n}(x) - \ldots \tag{2}$$

Soluţia e unică dacă această serie este convergentă sau din $f(x) = f(\beta(x)) + q(x)$ prin iterări obţinem :

$$f(\beta(x)) = f^2(x) + q^1(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$f^n(x) = f^{n+1}(x) + q^{n+1}(x)$ de unde obţinem soluţia

$$f(x) = q(x) + q^1(x) + \ldots + q^n(x) + \ldots$$

Soluţia e unică dacă această serie converge. În caz de divergenţă soluţiile [1], [2] se ameliorează.

Datorită modului formal de construcție a acestor soluții în prezenta notă vom demonstra unicitatea soluției în baza unor lucrări recente [3], [4] asupra construcției și unicității soluției ecuației iterative :

$$f(\beta(x)) = \varphi(x, f(x)) \tag{3}$$

2. **Ipoteze.**

1) $-\beta(x)$ este strict crescătoare pe interavalul I

2) $-\beta(x)$ are un punct fix de ordinul n ; $\lim_{n\to\infty} \beta^n(x) = \zeta$ unde ζ este capătul stîng al intervalului I și $\beta(x)$ verifică condițiile :

$$(\beta(x) - \zeta)(\zeta - x) > 0 \text{ pentru } x \in I \; x \neq \zeta$$

$$(\beta(x) - x)(\zeta - x) < 0 \text{ pentru } x \in I \; x \neq \zeta \tag{4}$$

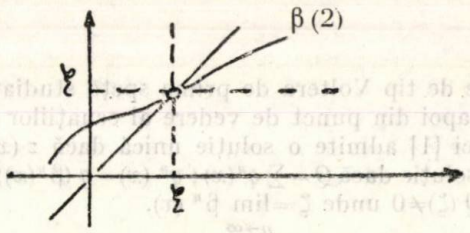


Fig. 1

Pentru fiecare x vom defini clasa de echivalență $C(x)$ relativ la aplicația $\beta(x)$ [3], [4].

Lemă [3].

Pentru orice $x_0 \neq \zeta$ din intervalul I ; mulțimea $I_0 = (\beta(x_0), x_0]$ conține exact un punct comun cu fiecare $C(x)$.

Teoremă.

Fie $q(x)$ continuă pe I. Pentru orice $x_0 \in$ I, $x_0 \neq \zeta$ și $f_0(x)$ continuă pe $I_0 = (\beta(x_0), x_0)]$ care verifică ecuația (1) există exact o funcție continuă $f(x)$ pe $I_0 = (\beta(x_0), x_0]$ care verifică ecuația (1) și $f(x) = f_0(x)$ pentru $x \in I_0$.

Demonstrație.

Din iterarea ecuației (1) rezultă $f(\beta^n(x)) - f(\beta^{n-1}(x)) = q(\beta^{n-1}(x))$ și trecînd la limită obținem $q(\zeta) = 0$ condiție necesară pentru solvabilitatea ecuației (1).

Deoarece (1) este de forma (3) cum $C(x) \cap I_0 = \{u\}$ atunci cf. [4] soluția poate fi scrisă unic :

$$f(x) = \begin{cases} f_0(u) & \text{dacă } x = u \\ \varphi(\beta^{n-1}(u), (\beta^{n-2}(u), \ldots, (u, f_0(u)) \ldots) & \text{dacă } x = \beta^n(u) \end{cases} \tag{5}$$

sau

$$f(x) = \begin{cases} f_0(u) & \text{dacă } x = u \\ f_0(u) - q(u) - q^1(u) - \ldots - q^{n-1}(u) & \text{dacă } x = \beta^n(u) \end{cases} \tag{5'}$$

faptul că $f(x)$ este continuă este evident.

Remarcă :

Dacă considerăm cazul general (5) unde presupunem $\varphi(x, y)$ continuă pe I atunci pentru a stabili continuitatea pe I a lui $f(x)$ considerăm : $J_0 = I_0 \cup \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [\beta^{i+1}(x_0), \beta^i(x_0)]$ și prin inducție, din continuitatea lui $f(x)$ pe $K_n = I_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [\beta^{i+1}(x_0), \beta^i(x_0)]$ rezultă continuitatea pe J_0.

Continuitatea lui $f(x)$ pe $I - J_0 \cup I_0$ poate fi extinsă similar avînd în vedere intervalele $[\beta^{-n}(x_0), \beta^{-n-1}(x_0)]$.

3. Aplicații în tehnică

Este cunoscut că dacă acțiunea externă aplicată la un sistem liniar este descrisă de o funcție $g(y)$; $\beta(x) \leqslant y < x$ rezultatul acțiunii (răspunsul „output" al sistemului) este descris de funcția (1) unde $z(x, y)$ este fncția de influență a lui Green care este specificată de sistemul dat. $g(x)$ și $q(x)$ descriu respectiv deformarea și densitatea sarcinii distribuite de-a lungul unei bare care se deformează liniar. Funcțiile $q(x)$ și $z(x, y)$ fiind date se cere a se găsi funcția de deformație.

BIBLIOGRAFIE

[1] C. Popovici Formes que doit avoir un vase, 1938, Cracovia (memoriu).
[2] M. Ghermănescu Ecuații funcționale.
[3] M. Reghiș L. Vuc Sur les equations fonctionnelles iteratives I, Publ. Math, XIII (1966).
[4] M. Kuczma Functional Ecuations.

ON THE INTEGRAL EQUATION $\int_{\beta(x)}^{x} z(x, y)\, g(y)\, dy = q(y)$

ABSTRACT

In this paper the authors characterize solution of integral equation by solution of iterative functional equation $f(\beta(x)) = (x, f(x))$.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 2 —1980**

ASUPRA STRUCTURII FORMULELOR CALCULULUI PROPOZIŢIONAL DEFINIT CU $(\vee, \neg)$

DE

C. MILICI, N. RACHIN

1. În acest articol autorii studiază structura formulelor calculului propoziţional definit cu conectorii $\vee$, $\neg$ vezi [1]. Se ştie că mulţimea formulelor formează o algebră a cărei patologie este studiată cf. [2].

2. Vom adopta următoarea definiţie : şirul de formule $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ $\ldots, \mathcal{A}_i, \ldots, \mathcal{A}_n$ se numeşte construcţie formativă de formule dacă oricare ar fi„ formula" $\mathcal{A}_i$ cu $i \neq n$ avem satisfăcută una din condiţiile de mai jos :

1) $\mathcal{A}_i$ este simbol de variabilă

2) $\mathcal{A}_i \rightleftharpoons \neg \mathcal{A}_j$ cu $j < ir$

3) $\mathcal{A}_i \rightleftharpoons \mathcal{A}_j \vee \mathcal{A}_k$ cu $j, k < i$

O formulă se numeşte idecompozabilă disjunctiv dacă ea nu este de forma 3).

Şirul de formule $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_n$ poartă numele de şir formativ disjunctiv (SFD) ataşat formulei $\mathcal{A}$ dacă ;

1) $\mathcal{A}_n \rightleftharpoons \mathcal{A}$

2) oricare ar fi $i < n$ avem satisfăcută una din condiţiile :

— $\mathcal{A}_i$ este idecompozabilă disjunctiv

— $\mathcal{A}_i \rightleftharpoons \mathcal{A}_j \vee \mathcal{A}_k$ $j, k < i$.

Lema 1. Orice formulă bine formată în sensul construcţiei formative admite un (SFD).

Demonstraţia se face prin inducţie.

Lema 2. Pentru orice formulă există cel puţin un (SFD) disjunctiv minimal.

Demonstraţie.

Fie t un (SFD) şi $\mathcal{S}(t)$ familia tuturor submulţimilor lui t care sînt (SFD). Cum $\mathcal{S}(t) \neq \varnothing$ ($\varnothing$ — fiind mulţimea vidă) şi $\mathcal{S}(t)$ e finită rezultă că în $\mathcal{S}(t)$ există elemente minimale. Pentru fiecare $\mathcal{F}$ formulă vom considera numai şirurile formative minimale.

Remarcă : Dacă avem două (SFD) minimale ataşate unei formule atunci acestea diferă doar prin o permutare [2].

Vom numi parte disjunctivă a unei formule $\mathcal{F}$ orice termen dintr-un şir (SFD) minimal corespunzător lui $\mathcal{F}$, atunci avem :

Teoremă.

1) $\mathcal{F}$ este parte disjunctivă a lui $\mathcal{F}$.

2) Dacă $\mathcal{G} \vee \mathcal{H}$ este parte disjunctivă a lui $\mathcal{F}$ atunci $\mathcal{G}$ este parte disjunctivă a lui $\mathcal{F}$ și $\mathcal{H}$ este parte disjunctivă a lui $\mathcal{F}$.

3) Dacă $\mathcal{A}$ este parte disjunctivă a lui $\mathcal{F}$ atunci $\mathcal{A}$ este parte disjunctivă a formulelor $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ și $\mathcal{G} \vee \mathcal{F}$.

Demonstrație.

1) este evidentă.

2) $\mathcal{G} \vee \mathcal{H} \rightleftharpoons \mathcal{F}'_k$ (a unui (SFD) minimal) există atunci $\mathcal{F}'_i$ și $\mathcal{F}'_j$ cu $i, j < k$ încît $\mathcal{F}'_k \rightleftharpoons \mathcal{G} \vee \mathcal{H} \rightleftharpoons \mathcal{F}'_i \vee \mathcal{F}'_j$ încît $\mathcal{G} \rightleftharpoons \mathcal{F}'_i$ și $\mathcal{H} \rightleftharpoons \mathcal{F}'_j$ [2] deci $\mathcal{G}$ și $\mathcal{H}$ sînt părți disjunctive a lui $\mathcal{F}$.

3) Fie $\mathcal{H}'_1$, $\mathcal{H}'_2$, $\mathcal{H}'_3$, ..., $\mathcal{H}'_s \rightleftharpoons \mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ un (SFD) a lui $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ există atunci $\mathcal{H}'_k$, $\mathcal{H}'_l$ cu k, $(l) < s$ încît $\mathcal{H}'_k \rightleftharpoons \mathcal{F}$, $\mathcal{H}'_l \rightleftharpoons \mathcal{G}$ [2]. deci : $\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_2, \ldots, \mathcal{H}'_k \rightleftharpoons \mathcal{F}$ (SFD) a lui $\mathcal{F}$ și deci aceest șir conține $\mathcal{A} \rightleftharpoons \mathcal{H}'_i$, deci $\mathcal{A}$ este parte disjunctivă și pentru $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ sau $\mathcal{G} \vee \mathcal{F}$.

Remarcă : Condițiile 1) și 2) din teoremă pot fi întîlnite uneori ca definiții sau axiome. Aceste considerații pot fi extinse în aritmetica formală.

BIBLIOGRAFIE

[1] E. Mendelson Introduction in Matematical logic.
[2] M. Reghiș Sisteme formale ale logicii matematice. Monografie Universitatea Timișoara.

ON THE STRUCTURE OF FORMULAS IN PROPOSITIONAL CALCULUS DEFINED WITH $(\vee, \neg)$.

ABSTRACT

In this paper the authors characterise the structure of formules by formative rings.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 2 —1980**

ASUPRA UNEI FORMULE DE CUBATURĂ

DE

E. BURLACU şi P. NĂSLĂU

Fie $D=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$, $f: D\to R$ o funcţie suficient de netedă, $0<x_1<\ldots<x_m=1$, $0<y_1<\ldots<y_n=1$. Considerăm formula :

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in I_i}\sum_{l\in J_j}A_{ij}^{kl}\,f^{(k+1)}(x_i,\ y_j)+R(f) \tag{1}$$

Definiţia 1. [2] Formula (1) are gradul de exactitate $(r,\ s)$ dacă $R(P_{kl})=0$ oricare ar fi polinomul $P_{kl}\in\pi_{rs}$ şi există un polinom $Q_{p,\ s+1}$, $0\leqslant p\leqslant r$ şi un polinom $Q_{r+1,\ q}$, $0\leqslant q\leqslant s$ astfel încît $R(Q_{p,\ s+1})\neq 0$ şi $R(Q_{r+1,\ q})\neq 0$

Notăm $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in I_i}\sum_{l\in J_j}$ cu $\sum_{ijkl}$ şi

$$K_r(x)=\begin{cases} x^{r-1} & \text{dacă } x\geqslant 0 \text{ şi } r\geqslant 1\\ 0 & \text{dacă } x<0 \text{ sau } r<1\end{cases}$$

Teorema 1. Dacă formula (1) are gradul de exactitate $(r-1,\ s-1)$ atunci $R(f)$ are exprimarea integrală :

$$R(f)=\sum_{h=0}^{s-1}\int_0^1 f^{(r+h)}(t,\ 0)\,F_{rh}(t)\,dt+\sum_{g=0}^{r-1}\int_0^1 f^{(g+s)}(0,\ z)\,G_{gs}(z)\,dz+$$

$$+\iint_D f^{(r+s)}(t,\ z)\,H_{rs}(t,\ z)\,dt\,dz \tag{2}$$

unde :

$$F_{rh}(t)=\frac{(1-t)^r}{r!\,(h+1)!}-\sum_{ijkl}K_1(h-l)\,A_{ij}^{kl}\,y_j^{h-1}\,K_{r-k}(x_i-t)\,\frac{1}{|h-l|!\,|r-k-1|!}$$

$$G_{gs}(z)=\frac{(1-z)^s}{s!\,(g+1)!}-\sum_{ijkl}K_1(g-k)\,A_{ij}^{kl}\,x_i^{g-k}\,K_{s-l}(y_j-z)\,\frac{1}{|g-k|!\,|s-l-1|!} \tag{3}$$

$$H_{rs}(t,\ z)=\frac{(1-t)^r}{r!}\,\frac{(1-z)^s}{s!}\sum_{ijkl}A_{ij}^{kl}\,K_{r-k}(x_i-t)\,K_{s-l}(y_j-z)\,\frac{1}{|r-k-1|!\,|s-l-1|!}$$

Demonstraţie : Considerăm formula lui Taylor :

$$f(x,\ y)=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1}f^{(i+j)}(0,\ 0)\,\frac{x_i}{i!}\,\frac{y_i}{j!}+R_{r-1,\ s-1}(x,\ y) \tag{4}$$

cu reprezentarea integrală [2] a restului :

$$R_{r-1,\ s-1}(x,\ y)=\sum_{h=0}^{s-1}\frac{y^h}{h!\,(r-1)!}\int_0^1 f^{(r+h)}(t,\ 0)\,K_r(x-t)\,dt+$$

$$+\sum_{g=0}^{r-1}\frac{x^g}{g!\,(s-1)!}\int_0^1 f^{(g+s)}(0,\ z)\,K_s(y-z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{(r-1)!\,(s-1)}\iint_D K_r(x-t)\,K_s(y-z)\,dt\,dz \qquad (5)$$

Din ipoteza teoremei şi (1), (4) rezultă :

$$R(f)=R(R_{r-1,\ s-1})=\iint_D R_{r-1,\ s-1}(x,\ y)\,dxdy-\sum_{ijkl}A_{ij}^{kl}R_{r-1,\ s-1}^{(k+1)}(x_i,\ y_j) \qquad (6)$$

Înlocuind $R_{r-1,\ s-1}(x,\ y)$ din (5) în (6) şi efectuînd calculele rezultă (2), (3). Reprezentarea (2)—(3) a restului este utilă în cazul în care formula (1) este optimală în anumite clase de funcţii. Fie $\mathcal{F}$ o clasă de funcţii suficient de netede, $I=\{I_1,\ I_2,\ \ldots,\ I_m\}$, $J=\{J_1,\ J_2,\ \ldots,\ J_n\}$, $E_{mn}^{IJ}(\mathcal{F};\ A_{ij}^{kl},\ x_i,\ y_j)=\sup_{f\in\mathcal{F}}|\ R(f)\ |$,
$E_{mn}^{IJ}(\mathcal{F})=\min_{A_{ij}^{kl},\ x_i,\ y_j} E_{mn}^{IJ}(\mathcal{F};\ A_{ij}^{kl},\ x_i,\ y_j)$

Definiţia 2. ([1]—[6]) Formula (1) este optimală în clasa de funcţii $\mathcal{F}$ dacă : $E_{mn}^{IJ}(\mathcal{F};\ A_{ij}^{kl},\ x_i,\ y_j)=E_{mn}^{IJ}(\mathcal{F})$

Fie $W_{L_2(D)}^{(r,\ s)}(P_r,\ Q_s,\ M_{rs})=\{f:D\to R\mid f^{(g,\ h)}$ absolut continue pe D, $\|f^{(r+h)}(\cdot,\ 0)\|_{L_2[0\,1]}\leqslant P_r\,\|f^{(g+s)}(0,\ \cdot)\|_{L_2[0,\ 1]}\leqslant Q_S,\ \|f^{(r+s)}(\cdot,\ \cdot)\|_{L_2(D)}\leqslant M_{rs}$, $g=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1\ ;\ h=0,\ 1,\ \ldots,\ s-1\}$

Teorema 2. Dacă formula (1) are gradul de exactitate $(r-1,\ s-1)$ atunci:

$$E_{mn}^{IJ}(W_{L_2(D)}^{(r,s)}(P_r,\ Q_s,\ M_{rs})\ ;\ A_{ij}^{kl},\ x_i,\ y_j)=$$

$$=P_r\sum_{h=0}^{s-1}\|F_{rh}\|_{L_2[0,1]}+Q_s\sum_{g=0}^{r-1}\|G_{gs}\|_{L_2[0,1]}+M_{rs}\|H_{rs}\|_{L_2(D)} \qquad (7)$$

Demonstraţie : Din teorema 1 şi inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski rezultă că pentru orice $f\in W_{L_2(D)}^{(r,\ s)}(P_r,\ Q_s,\ M_{r,s})$:

$$|\ R(f)\ |\leqslant\sum_{h=0}^{s-1}\int_0^1|\ f^{(r+h)}(t,\ 0)\ |\cdot|\ F_{rh}(t)|\,dt+\sum_{g=0}^{s-1}\int_0^1|\ f^{(g+s)}(0,\ z)\ |\ |\ G_{gs}(z)\ |\,dz+$$

$$+\iint_D|\ f^{(r+s)}(t,\ z)\ |\ |\ H_{rs}(t,\ z)\ |\,dt\,dz\leqslant P_r\sum_{h=0}^{s-1}\|F_{rh}\|_{L_2[0,1]}+ \qquad (8)$$

$$+Q_s\sum_{g=0}^{r-1}\|G_{gs}\|_{L_2[0,\ 1]}+M_{rs}\|H_{rs}\|_{L_2(D)}$$

Această majorare este chiar marginea superioară exactă. Ea este atinsă pentru funcţia :

$$f_{rs}(x,\ y)=P_r\sum_{h=0}^{s-1}(\|F_{rh}\|_{L_2[0,\ 1]})^{-1/2}\cdot\frac{y^h}{h!}\int_0^x\frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}F_{rh}(t)\,dt+$$

$$+Q_s \sum_{g=0}^{r-1} (\| G_{gs} \|_{L_2[0,1]})^{-1/2} \cdot \frac{x^g}{g!} \int_0^x \frac{(y-z)^{s-1}}{(s-1)!} G_{gs}(z)\, dz +$$

$$+M_{rs} (\| H_{rs} \|_{L_2(D)})^{-1/2} \cdot \int_0^x \int_0^y \frac{(x-t)^{s-1}}{(s-1)!} H_{rs}(t, z)\, dt\, dz \qquad (9)$$

Într-adevăr, se observă că $f_{rs} \in W^{(r,s)}_{L_2(D)}(P_r, Q_s, M_{rs})$ și că înlocuind (9) în (2), $R(f_{rs})$ este chiar membrul drept din (8).

În [4] se demonstrează că dacă nodurile (x_i, y_j) se consideră fixe, atunci formula (1) este optimală în clasa $W^{(r,s)}_{L_2(D)}(P_r, Q_s, M_{rs})$ dacă :

$$A^{kl}_{ij} = B^k_i C^l_j,\ B^k_i = \frac{1}{r!}(u^{k+1}_{i+1} + (-1)^k u^{k+1}_i)\ X^{(r-k-1)}_r(1),\ u_i = \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1}),$$

$$C^l_j = \frac{1}{s!}(V^{l+1}_{j+1} + (-1)^l V^{l+1}_j)\ X^{(s-l-1}_s(1),\ V_j = \frac{1}{2}(y_j - y_{j-1}) \qquad (10)$$

iar $X_p(x)$ este polinomul lui Legendre de ordin p pe $[-1, 1]$ cu primul coefi cient 1, și se dă o majorare a restului. Marginea exactă rezultă din teorema 2 Rezultă , deci :

Teorema 3. Formula (1) cu gradul de exactitate $(r-1, s-1)$ și nodurile (x_i, y_j) fixe este optimală în calsa $W^{(r,s)}_{L_2(D)}(P_r, Q_s, M_{rs})$ dacă coeficienții A^{kl}_{ij} sînt dați de (10) iar $E^{IJ}_{mn}(W^{(r,s)}_{L_2(0)}(P_r, Q_s, M_{rs}))$ este dat de (7), (3), (10).

În [1]—[3], [5], [6] se pune problema construirii unor formule optimale considerînd și nodurile și coeficienții variabili. Astfel în [2] se demonstrează că formula (1) cu $I_i = J_j = \{0\}$ este optimală în clasa $W^{(1,1)}_{L_2(D)}(1, 1, 1)$ dacă :

$$A^{00}_{ij} = B_i C_j\ ;\ B_m = \frac{1}{2m},\ B_1 = B_2 = \ldots = B_{m-1} = \frac{1}{m}\ ;\ x_i = \frac{i}{m},\quad i = \overline{0,m}$$

$$C_n = \frac{1}{2n},\ C_1 = C_2 = \ldots = C_{n-1} = \frac{1}{n}\ ;\ y_j = \frac{j}{n},\quad j = \overline{0,\ n} \qquad (11)$$

În mod analog se poate demonstra că teorema rămîne valabilă și în clasa $W^{(1,1)}_{L_2(D)}(P_1, Q_1, M_{11})$. Înlocuind (11) în (7), (3) rezultă :

Teorema 4. Formula (1) cu $I_i = J_j = \{0\}$ este optimală în clasa : $W^{(1,1)}_{L_2(D)}(P_1, Q_1, M_{11})$ dacă nodurile și coeficienții sînt dați de (11) iar

$$E^{00}_{mn}(W^{(1,1)}_{L_2(D)}(P_1, Q_1, M_{11})) = P_1 \frac{1}{2\sqrt{3}m} + Q_1 \frac{1}{2\sqrt{3}n} + M_{11} \frac{\sqrt{4m^2+4n^2-1}}{12\,mn}\ .$$

BIBLIOGRAFIE

1. Coman G. — Asupra unor formule optimale de cuadratură, Studia universitatis Babeș-Bolyai, Cluj, 1970, 2, p. 39—54.
2. Coman G. — Kubaturno optimalinîe formuli dlia necotorih classov funcții, Rev. roum, de math. p. et appl., 1972, 7, p. 1025—1027.
3. Coman G. — Minimal monosplines în L_2 and optimal cubature formulae, l'Analyse num. et la th. de l'approx., 1978, 2, p. 147—155.

4. Gânscă I. — Optimal cubature formulas on a nonreactangular domain, Rev. roum. de math. p. et appl., 1979, 4, p. 549—559.
5. Ibragimov I. I., Aliev R. M.— O necotorih nailucișih cubaturnih formulah, Izv. An. Azerb. SSR, seria fiz. teh. i matem. nauk., 1967, 3—4, p. 154—161.
6. Nikolskii I. M., Korneiciuk I. P., — Kubaturnie formuli, Moskva, „Nauka" 1979.

ON A CUBATURE FORMULA

ABSTRACT

In this paper it is established the remainder estimation (7) for the formula (1) and some results in the case when this formula is optimal in the set $W^{(r,s)}_{L_q(D)}(P_r, Q_s, M_{rs})$.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 2 —1980**

ASUPRA UNEI ECIAŢII CU MATRICI CIRCULARE BOOLEENE

DE

E. BURLACU şi P. NĂSLĂU

1. Fie $\mathcal{M}_n = \{A = \| a_{ij} \| \mid a_{ij} \in L_2,\ i = \overline{0,\ n-1},\ j = \overline{0,\ n-1}\}$ mulţimea matricilor pătrate de ordinul n cu elemente din laticea $L_2 = \{0,\ 1\}$. Se ştie , [1], că $\mathcal{M}_n$ este o algebră Schröder-Moisil prin raport cu operaţiile „$\cup$" (reuniune), „$\cap$" (intersecţie), „$-$" (complementară) şi „$.$" (produs).

Fie $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{M}_n$ submulţimea formată din matricile circulare booleene : $C \in \mathcal{C}_n$ dacă este de forma :

$$C = \begin{Vmatrix} C_0 & C_1 \ldots C_{n-2} & C_{n-1} \\ C_{n-1} & C_0 \ldots C_{n-3} & C_{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ C_1 & C_2 \ldots C_{n-1} & C_0 \end{Vmatrix} \tag{1}$$

adică dacă $C = \| C_{ij} \|$ atunci $C_{0k} = C_{jm}$ unde $j + k \equiv m \pmod n$, $0 \leqslant j,\ k,\ m \leqslant n-1$. Deoarece matricea C este determinată dacă se cunoaşte prima sa linie, se notează :

$$C = (C_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_{n-1}) \tag{2}$$

$\mathcal{C}_n$ este subsemigrup abelian maximal în $\mathcal{M}_n$. Comutativitatea acestui grup rezultă definind adecvat, [2], produsul în $\mathcal{C}_n$:

$$\text{A.B.} = \left(\bigcup_{\substack{i,\ j=0 \\ i+j \equiv 0 \pmod n}}^{n-1} (a_i \cap b_j),\ \bigcup_{\substack{i,\ j=0 \\ i+j \equiv 1 \pmod n}}^{n-1} (a_i \cap b_j),\ \ldots,\ \bigcup_{\substack{i,\ j=0 \\ i+j \equiv n-1 \pmod n}}^{n-1} (a_i \cap b_j) \right) \tag{3}$$

Din (3) rezultă uşor că $\mathcal{C}_n$ este o algebră Schröder-Moisil maximală în algebra $\mathcal{M}_n$.

Fie $\mathcal{G}_n = \{G \mid G = (g_0,\ \ldots\ g_j,\ \ldots,\ g_{n-1}),\ g_1 = 1,\ g_j = 0$ pentru

$$j \neq 1\ ;\ i = \overline{0,\ n-1}\} \tag{4}$$

Faţă de înmulţirea matricilor $\mathcal{G}_n$ constituie un subsemigrup al lui $\mathcal{C}_n$ şi constituie o bază pentru subalgebra $\mathcal{C}_n$, adică :

Pentru orice $C \in \mathcal{C}_n$ există $\alpha_i \in L_2$, $i = \overline{0,\ n-1}$ astfel încît $C = \alpha_0\ EU\ \alpha_1\ G \cup \ldots \cup \alpha_{n-1}\ G^{n-1}$ unde $E = G^0 = G^n$ sau, definind $\Delta(C) = \{i \mid C_i = 1\}$ pentru $C \in \mathcal{C}_n$ şi notînd $|\ \Delta(C)\ |$ cardinalul lui $\Delta(C)$, C se poate scrie :

$$C = G^{i_1} \cup G^{i_2} \cup \ldots \cup G^{i_k} \text{ unde } \Delta(C) = \{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k\} \tag{5}$$

O matrice $A \in \mathcal{M}_n$ se numește primitivă dacă există $p \in N$ astfel încît $A^p = I$ unde $I \in \mathcal{C}_n$, $|\Delta(I)| = n$.

Condiția necesară și suficientă ca o matrice circulară booleană $C \in \mathcal{C}_n$ să fie primitivă este [3] :

$$\text{c.m.m.d.c. } (i_2 - i_1,\ i_3 - i_1,\ \ldots,\ i_k - i_1,\ n) = 1 \tag{6}$$

unde : $\{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k\} = \Delta(C)$

2. Fie ecuația :

$$AX = A,\quad A \in \mathcal{C}_n \tag{7}$$

Ecuația (7) admite soluții, una din ele fiind matricea E iar marginea superioară a soluțiilor ei este matricea $X_0 = \overline{A^T \bar{A}}$ [1].

Lemă. Dacă $A \in \mathcal{C}_n$ și $|\Delta(A)| = 1$ atunci ecuația (7) are soluția unică $X = E$.

Într-adevăr, deoarece $|\Delta(A)| = 1$ rezultă că A este o matrice de permutare și soluția unică este $A^T A = E$.

Dacă $|\Delta(A)| \neq 1$ prezintă interes cazul în care ecuația (7) admite și soluții diferite de E și se pune problema în ce condiții se întîmplă acest caz. Răspunsul este dat de următoarea :

Teoremă. Condiția necesară și suficientă ca ecuația (7) să admită și alte soluții pe lîngă soluția $X = E$ este :

$$\text{c.m.m.d.c. } (|\Delta(A)|,\ n) \neq 1 \tag{8}$$

și să existe s, $0 < s < n$ astfel încît aplicația $f : \Delta(A) \to \Delta(A)$ definită prin :

$$f(i_\alpha) \equiv i_\alpha + s \pmod{n} \tag{9}$$

să fie bijectivă.

Demonstrație. Din (3) se deduce :

$$A.B^T = \left(\bigcup_{\substack{i=0 \\ j \equiv i \pmod n}}^{n-1} (a_i \cap b_j),\ \bigcup_{\substack{i=0 \\ i \equiv j+1 \pmod n}}^{n-1} (a_i \cap b_j),\ \ldots,\ \bigcup_{\substack{i=0 \\ i \equiv j+n-1 \pmod n}}^{n-1} (a_i \cap b_j) \right)$$

$$A^T.B = \left(\bigcup_{\substack{i=0 \\ j-i \pmod n}}^{n-1} (a_i \cap b_j),\ \bigcup_{\substack{i=0 \\ j=i+1 \pmod n}}^{n-1} (a_i \cap b_j),\ \ldots,\ \bigcup_{\substack{i=0 \\ j=i+n-1 \pmod n}}^{n-1} (a_i \cap b_j) \right)$$

Fie $X_0 = \overline{A^T \cdot \bar{A}}$ cea mai mare soluție a ecuației (7). Dacă $E \subset X_0$ atunci există x_{0s} cu $s > 0$ astfel încît :

$$x_{0s} = \overline{\bigcup_{\substack{i=0 \\ j \equiv i+s \pmod n}}^{n-1} (a_i \cap \bar{a}_j)} = 1, \quad \text{deci} \quad \bigcup_{\substack{i=0 \\ j \equiv i+s \pmod n}}^{n-1} (a_i \cap \bar{a}_j) = 0 \tag{10}$$

sau :

$$a_{i_0} \cap \bar{a}_{j_0} = 0,\ a_{i_1} \cap \bar{a}_{j_1} = 0,\ \ldots,\ a_{i_k} \cap \bar{a}_{j_k} = 0 \tag{11}$$

unde :

$$\{i_0,\ i_1,\ \ldots,\ i_k\} = \Delta(A),\ j_\alpha \equiv i_\alpha + s \pmod n,\ \alpha = \overline{1,\ k} \tag{12}$$

Relațiile (11) sînt echivalente cu : $a_{j_0}=a_{j_1}=\ldots=a_{j_k}=1$ de unde rezultă $\{j_0, j_1, \ldots, k_k\}\subset\Delta(A)$.

Deoarece $0<s<n$, funcția $f:\Delta(A)\to\Delta(A)$, $f(i)=j_\alpha$, j_α definit de (12), este corect definită și injectivă și deoarece $|\Delta(A)|<\infty$, ea este bijectivă.

Deci : $j_0=i_{\alpha_0}$, $j_1=i_{\alpha_1}$, $\ldots$, $j_k=i_{\alpha_k}$, de unde :

$$i_\beta-i_{\alpha_\beta}\equiv s \pmod{n},\ \beta=\overline{0,\ k} \tag{13}$$

Adunînd relațiile (13) rezultă ecuația :

$$(k+1)s\equiv 0 \pmod{n} \tag{14}$$

care are soluție dacă și numai dacă $(k+1,\ n)\neq 1$, adică (8).

Reciproc, din condițiile (8) și (9), luînd $j_\alpha=f(i_\alpha)$ rezultă (11) și deci (10), de unde rezultă $x_{0s}=1$ pentru $s>0$ deci $E\subset X_0$.
$\neq$

Consecințe : 1. Dacă $\Delta(A)=H$ este un subgrup al grupului aditiv al claselor de resturi modulo n, avînd ordinul p atunci soluția X va conține p unități și între fiecare două unități consecutive n/p zerouri, adică :

$$X=(\underbrace{100\ldots0}_{n/p}\ \underbrace{100\ldots0}_{n/p}1\ldots\} \tag{15}$$

2. Soluția X este de forma (15) și dacă $\Delta(A)$ este o clasă bilaterală față de un subgrup H.

3. Dacă $A=\cup A_i$ și A_i sînt de tipul celor de la observația 1 sau 2 și $\Delta(A)$ nu formează un alt subgrup de ordin superior ordinului lui H atunci X este tot de forma (15).

BIBLIOGRAFIE

1. R. D. Luce, Note on Boolean Matrix Theory. Proc. Am. Math. Soc. 3 (1952), 382–388.
2. K. K. Hang Butler and J. R. Krabil. Circular Boolean Relation Matrices. Czeck. Math. J. 24 (99) 2, 1974.
3. S. Schwartz. Circular Boolean Relation Matrices. Czech Math. J. 24 (1974).

ON A CIRCULAR BOOLEAN MATRIX EQUATION

ABSTRACT

In this paper it is given one necessary and sufficient condition for existence of a solution $X\neq E$ for equation $AX=A$, $A\in\mathcal{C}_n$ — circular boolean matrix set.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 25 (39) **Fascicola 2 —1980**

O METODĂ ASIMPTOTICĂ PENTRU UN SISTEM CICLIC DE ECUAŢII INTEGRO-DIFERENŢIALE

DE
NĂSLĂU PAVEL

În această lucrare vom da o metodă asimptotică pentru sisteme de ecuaţii integro-diferenţiale de forma :

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t,\ \varepsilon)}{dt} = a\ (\tau,\ \varepsilon) \times (t,\ \varepsilon) + b\ (\tau,\ \varepsilon)\ y\ (t,\ \varepsilon) + \displaystyle\int_0^L [c\ (\tau,\ \sigma,\ \varepsilon), \\ x\ (\sigma,\ \varepsilon) + d\ (\tau,\ \sigma,\ \varepsilon)\ y\ (\sigma,\ \varepsilon)]\ d\sigma \\ \dfrac{dy\ (t,\ \varepsilon)}{dt} = b\ (\tau,\ \varepsilon) \times (t,\ \varepsilon) + a\ (\tau,\ \varepsilon)\ y\ (t,\ \varepsilon) + \displaystyle\int_0^L [d\ (\tau,\ \sigma,\ \varepsilon). \\ x\ (\sigma,\ \varepsilon) + c\ (\tau,\ \sigma,\ \varepsilon)\ y\ (\sigma,\ \varepsilon)]\ d\sigma \end{cases} \tag{1}$$

unde $\tau = \varepsilon\ t$, ε fiind un parametru mic : $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ (τ se numeşte „timpul încet", dacă t simbolizează timpul), $\tau \in [0,\ L]$ $\left(\text{deci } t \in \left[0,\ \dfrac{L}{\varepsilon}\right]\right)$, iar funcţiile $a\ (\tau,\ \varepsilon)$, $b\ (\tau,\ \varepsilon)$ şi $c\ (\tau,\ \sigma,\ \varepsilon)$, $d\ (\tau,\ \sigma,\ \varepsilon)$ „variază încet" (în raport cu t) şi îndeplinesc următoarele condiţii :

a) sînt derivabile de $m+1$ ori prin raport cu toate argumentele pe $[0,\ T] \times [0,\ \varepsilon_0]$, respectiv pe $[0,\ T] \times [0,\ T] \times [0,\ \varepsilon_0]$

b) $a\ (\tau,\ \varepsilon) \neq b\ (\tau,\ \varepsilon)$ pentru orice $\tau \in [0,\ L]$ şi $\varepsilon \in [0,\ \varepsilon_0]$

c) $a\ (\tau,\ 0) \pm b\ (\tau,\ 0) < -\beta < 0$

1. Sistemul (1) se poate scrie sub forma

$$\frac{dX\ (t,\ \varepsilon)}{dt} = A\ (\tau,\ \varepsilon)\ X\ (t,\ \varepsilon) + \int_0^L B\ (\tau,\ \sigma,\ \varepsilon)\ X\ (\sigma,\ \varepsilon)\ d\sigma \tag{2}$$

unde $X\ (t,\ \varepsilon)$ este matricea coloană $[x\ (t,\ \varepsilon)\ y\ (t,\ \varepsilon)]^T$ iar

$$A\ (\tau,\ \varepsilon) = \begin{Vmatrix} a\ (\tau,\ \varepsilon) & b\ (\tau,\ \varepsilon) \\ b\ (\tau,\ \varepsilon) & a\ (\tau,\ \varepsilon) \end{Vmatrix}, \quad B\ (\tau,\ \sigma,\ \varepsilon) = \begin{Vmatrix} c\ (\tau,\ \sigma,\ \varepsilon) & d\ (\tau,\ \sigma,\ \varepsilon) \\ d\ (\tau,\ \sigma,\ \varepsilon) & c\ (\tau,\ \sigma,\ \varepsilon) \end{Vmatrix}$$

N. I. Skil şi A. N. Voronoi /4/ au considerat sistemul

$$\varepsilon \frac{dX\ (\tau,\ \varepsilon)}{d\tau} = A\ (\tau,\ \varepsilon)\ X\ (\tau,\ \varepsilon) + \varepsilon \int_0^1 K\ (\tau,\ \sigma,\ \varepsilon)\ X\ (\tau,\ \varepsilon)\ d\sigma \tag{3}$$

cu matricile pătratice $A(\tau, \varepsilon)$ și $K(\tau, \sigma, \varepsilon)$ de un ordin oarecare în ipoteza că rădăcinile caracteristice ale matricei $A_0(\tau)$ din dezvoltarea $A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\tau)\varepsilon^k$ sînt simple.

În celc ce urmează vom da o motodă asimptotică directă pentru sistemul (1)

Prin adunarea și scăderea membru cu membru a ecuațiilor (1) obținem două ecuații de forma :

$$\frac{dz(t, \varepsilon)}{dt} = e(\tau, \varepsilon)\, z(t, \varepsilon) + \int_0^L f(\tau, \sigma, \varepsilon)\, z(\sigma, \varepsilon)\, d\sigma$$

cu $z(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon)$ sau $z(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)$ și $e(\tau, \varepsilon) = a(\tau, \varepsilon) + b(\tau, \varepsilon)$ sau $e(\tau, \varepsilon) = a(\tau, \varepsilon) - b(\tau, \varepsilon)$ și $f(\tau, \sigma, \varepsilon) = c(\tau, \sigma, \varepsilon) + d(\tau, \sigma, \varepsilon)$ sau $f(\tau, \sigma, \varepsilon) = -c(\tau, \sigma, \varepsilon) - d(\tau, \sigma, \varepsilon)$.

2. Fie deci ecuația

$$\frac{dz(t, \varepsilon)}{dt} = e(\tau, \varepsilon)\, z(t, \varepsilon) + \int_0^L f(\tau, \sigma, \varepsilon)\, z(\sigma, \varepsilon)\, d\sigma,\ z(0, \varepsilon) = z_0 \tag{4}$$

Metoda asimptotică presupune asocierea la ecuația (4) a ecuației în general mai simple :

$$\frac{dz(t, \varepsilon)}{dt} = E_m(\tau, \varepsilon)\, Z(t, \varepsilon) + \int_0^L F_m(\tau, \sigma, \varepsilon)\, z(\sigma, \varepsilon)\, d\sigma,\ z(0, \varepsilon) = z_0 \tag{5}$$

unde E_m și F_m sînt polinoamele Mac Laurin prin raport cu ε din dezvoltările :

$$e(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} e_k(\tau)\varepsilon^k + e_{k+1}(\tau, \varepsilon)\varepsilon^{k+1},\quad E_m(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} e_k(\tau)\varepsilon^k$$

$$f(\tau, \sigma, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} f_k(\tau, \sigma)\varepsilon^k + f_{k+1}(\tau, \sigma, \varepsilon)\varepsilon^{k+1},$$

$$F_m(\tau, \sigma, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} f_k(\tau, \sigma)\varepsilon^k.$$

Fie $Z(t, \varepsilon)$, $Z_m(t, \varepsilon)$ soluțiile ecuațiilor (4) respectiv (5).

Pentru evaluarea diferenței $Z(t, \varepsilon) = z(t, \varepsilon) - Z_m(t, \varepsilon)$ se observă prin calcul direct că ea verifică ecuația :

$$\frac{dZ(t, \varepsilon)}{dt} = e(\tau, \varepsilon)\, Z(t, \varepsilon) + \int_0^L f(\tau, \sigma, \varepsilon)\, Z(\sigma, \varepsilon)\, d\sigma + \varepsilon^{m+1} \cdot$$

$$\cdot F(t, \varepsilon),\ Z(0, \varepsilon) = 0 \tag{6}$$

unde $F(t, \varepsilon) = e_{k+1}(\tau, \varepsilon)\, Z_m(t, \varepsilon) + \int_0^L f_{k+1}(\tau, \sigma, \varepsilon)\, Z_m(\sigma, \varepsilon)\, d\sigma$.

Fie $A = \sup |\, e(t, \varepsilon)\,|$, $C = \sup |\, f(\tau, \sigma, \varepsilon)\,|$, $D = \sup |\, F(\tau, \varepsilon)\,|$.

Teoremă. Dacă $e(\tau, \varepsilon)$ și $f(\tau, \sigma, \varepsilon)$ sînt de $m+1$ ori derivabile pe $[0, T] \times [0, \varepsilon_0]$ respectiv $[0, T] \times [0, T] \times [0, \varepsilon_0]$ și $e(\tau, \varepsilon) \neq 0$, $e_0(\tau) < -\beta$, $\beta > A + CL$ atunci :

$$|\, z(t, \varepsilon) - Z_m(t, \varepsilon)\,| \leqslant \frac{D}{\beta - A - CL} \cdot \varepsilon^{m+1} \tag{7}$$

3. Pentru demonstrarea acestei teoreme sînt necesare următoarele două leme :

Lemă. /2.3/ Dacă

$$r(t) \leqslant c \int_0^t r(s)\, ds + f(t) \qquad \forall\, t \in [0,\ t_0]$$

unde $c>0$ iar f este derivabilă pe $[0,\ t_0]$ atunci :

$$r(t) \leqslant f(0)\, e^{ct} + \int_0^t e^{c(t-s)} f'(s)\ ds \quad \forall\ t \in [0,\ t_0]$$

Lemă. Dacă

$$r(t) \leqslant A \int_0^t e^{-\beta(t-\varepsilon)} r(s)\, ds + B \int_0^t e^{-\beta(t-s)}\, ds,\ \forall\ (t \in [0,\ t_0] \tag{8}$$

unde $B>0$, $\beta>A>0$ atunci : $r(t) \leqslant B/(\beta-A)\ \forall\ t \in [0,\ t_0]$

Pentru demonstrarea lemei noastre este suficient să transcriem ipoteza (7) sub forma :

$$r(t)\, e^{\beta t} \leqslant A \int_0^t e^{\beta s} r(s)\, ds + B \int_0^t e^{\beta s}\, ds$$

și să observăm că sînt îndeplinite condițiile lemei precedente, de data aceasta pentru funcția $r(t)\ e^{\beta t}$.

Revenind la demonstrația teoremei, transformăm ecuația (6) într-o ecuație integrală echivalentă prin substituția /1/ :

$$Z(t, \varepsilon) = Y(t, \varepsilon).\ U(t,\ \varepsilon); \tag{9}$$

$$\frac{dY(t,\ \varepsilon)}{dt} U(t,\ \varepsilon) + Y(t,\ \varepsilon) \frac{dU(t,\ \varepsilon)}{dt} = e(\tau,\ \varepsilon)\ X(t,\ \varepsilon)\ U(t,\ \varepsilon) +$$

$$+ \int_0^L f(\tau, \sigma, \varepsilon)\ Y(\sigma,\ \varepsilon)\ U(\sigma,\ \varepsilon)\ d\sigma + \varepsilon^{m+1} F(t, \varepsilon)$$

Dacă $Y(t,\ \varepsilon)$ este soluția problemei Cauchy $Y(0,\ \varepsilon) = 1$ pentru ecuația $\frac{dY(t,\ \varepsilon)}{dt} = e_0(\tau)\ Y(t,\ \varepsilon)$ atunci :

$$\frac{dU(t,\ \varepsilon)}{dt} = e(\tau,\ \varepsilon)\ U(t,\ \varepsilon) + \int_0^L f(\tau, \sigma, \varepsilon)\ Z(\sigma, \varepsilon)\, d\sigma / Y(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} \cdot$$
$$\cdot F(t,\ \varepsilon) / Y(t,\ \varepsilon)$$

de unde prin integrare, ținînd cont de (9) obținem :

$$Z(t, \varepsilon) = \int_0^t e(\xi, \varepsilon)\ Z(\xi, \varepsilon)\ Y(t, \varepsilon) / Y(\xi,\ \varepsilon)\ d\xi +$$

$$+ \int_0^t Y(t, \varepsilon) / Y(\xi, \varepsilon) \cdot \left[\int_0^L f(\tau,\ \sigma,\ \varepsilon)\ Z(\sigma,\ \varepsilon)\ d\sigma \right] d\xi + \varepsilon^{m+1} \cdot$$

$$\cdot \int_0^t Y(t,\ \varepsilon) / Y(\xi,\ \varepsilon)\ F(\xi,\ \varepsilon)\ d\xi \tag{10}$$

Din (10) rezultă inegalitatea integrală

$$| Z(t, \varepsilon) | \leqslant A \int_0^t e^{-\beta(t-s)} | Z(s, \varepsilon) | \, ds + \int_0^t e^{-\beta(t-s)} \cdot \left[C \cdot \int_0^L | Z(\rho, \varepsilon) | \, d\rho + \varepsilon^{m+1} \cdot D \right] ds \tag{11}$$

Aplicînd lema precedentă rezultă din (11) :

$$| Z(t, \varepsilon) | \leqslant \left[C \int_0^L | Z(p, \varepsilon) | \, dp + \varepsilon^{m+1} \, D \right] / \subset (\beta - A)$$

de unde rezultă (7).

4. Consecinţă : Dacă $X_m(t, \varepsilon)$, $Y_m(t, \varepsilon)$ este aproximarea asimptotică de ordinul m a sistemului (1) corespunzătoare lui $Z_m(t, \varepsilon)$ atunci

$$| (x(t, \varepsilon) - X_m(t, \varepsilon) | \leqslant \frac{D}{\beta - A - CL} \varepsilon^{m+1}, \; | y(t, \varepsilon) - Y_m(t, \varepsilon) | \leqslant \frac{D}{\beta - A - CL} \cdot \varepsilon^{m+1}$$

Această afirmaţie rezultă din (7) pentru cele două exprimări ale lui $z(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) \pm y(t, \varepsilon)$.

În încheiere autorul mulţumeşte tovarăşului prof. dr. Borislav Cristici pentru ideile preţioase privind elaborarea acestei lucrări.

BIBLIOGRAFIE

. Bellman, R., Stability Theory of Differential Equations, Me Graw-Hill Book Company Inc. New York, 1954.
2. Coddington E., Theory of Ordinary Differential Equations, Levinson N., New York, 1955.
3. Feşcenko S. F., N. I. Skil, L. D. Nikolanko Asimptoticeskie metodi v teorii lineinih differenţalinih uravnenii. „Naukovaia Dumka" Kiev 1966.
4. Skil N. I., A. N. Voronoi Dopovn. AN URSR Ser A, Nr. 7 (1975), p. 593–596.

UNE MÈTHOD ASYMPTOTIQUE POUR UN SYSTÈME CYCLIQUE D'ÈQUATIONS INTÈGRO-DIFFÈRENTIELLES

RÈSUMÈ

Dans ce travail on traite par des mèthodes asymptotiques par rapport à un paramètre petit le système

$$\frac{dX}{dt} = A(\tau, \varepsilon) \, X(t, \varepsilon) + \int_0^L B(\tau, \sigma, \varepsilon) \, X(\sigma, \varepsilon) \, d\sigma$$

où les matrices A et B sont des matrices cycliques du deuxième ordre.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 2 —1980**

FUNCŢII p^* — CONTINUE

DE

NICOLAE CRIVĂŢ

Scopul acestei note este introducerea noţiunii de p^* — continuitate pentru o funcţie definită pe un spaţiu topologic şi luînd valori în alt spaţiu topologic. p^* — continuitatea constituie o generalizare a continuităţii globale a unei funcţii. Dacă spaţiului topologic în care funcţia ia valori i se impun condiţii de separaţie, atunci cele două noţiuni sînt echivalente (propoziţiile 1.1 şi 1.2). În partea a doua a lucrării se stabilesc legăturile dintre p^* — continuitate şi uniform continuitate, respectiv p — continuitate ([1]).

1. **Definiţia 1. 1.** Fie $(X, \mathcal{T})$ şi $(Y, \mathcal{U})$ două spaţii topologice arbitrare şi funcţia $f:(X, \mathcal{T})\to(Y, \mathcal{U})$. Vom spune că f este p^* — continuă dacă şi numai dacă verifică condiţia următoare :

$$\forall A, B\subseteq X : \bar{A}\cap\bar{B}\neq\varnothing \text{ implică } \overline{f(A)}\cap\overline{f(B)}\neq\varnothing \tag{1.1}$$

Propoziţia 1.1. Dacă $f:(X, \mathcal{T})\to(Y, \mathcal{U})$ este continuă, atunci este şi p^* — continuă.

Demonstraţie. Deoarece f este continuă avem :

$$\forall A\subseteq X,\ f(\bar{A})\subseteq\overline{f(A)} \tag{1.2}$$

Fie $A, B\subseteq X$ cu proprietatea că $\bar{A}\cap\bar{B}\neq\varnothing$. Atunci $f(\bar{A}\cap\bar{B})\neq\varnothing$ şi cum $f(\bar{A})\cap$ $\cap f(\bar{B})\supseteq f(\bar{A}\cap\bar{B})$, rezultă că $f(\bar{A})\cap f(\bar{B})\neq\varnothing$. Folosind (1.2) rezultă că $\overline{f(A)}\cap$ $\cap\overline{f(B)}\neq\varnothing$ şi deci (1.1) are loc.

Propoziţia 1.2. Dacă $f:(X, \mathcal{T})\to(Y, \mathcal{U})$ este p^* — continuă iar $(Y, \mathcal{U})$ este spaţiu T_1, atunci f este continuă.

Demonstraţie. Vom arăta că f satisface condiţia (1.2) care este echivalentă cu continuitatea. Fie $A\subseteq X$, $A\neq\varnothing$ (în cazul $A=\varnothing$ (1.2) este evident satisfăcută) şi $x\in\bar{A}$. Atunci $\overline{\{x\}}\cap\bar{A}\neq\varnothing$ şi din (1.1) rezultă că $\overline{\{f(x)\}}\cap\overline{f(A)}\neq\varnothing$. Cum $(Y, \mathcal{U})$ este spaţiu T_1 avem $\overline{\{f(x)\}}=\{f(x)\}$ şi deci $\{f(x)\}\cap\overline{f(A)}\neq\varnothing$, adică $f(x)\in\overline{f(A)}$. Deci $f(\bar{A})\subseteq\overline{f(A)}$ adică (1.2) este satisfăcută.

Observaţia 1.1. Condiţia ca $(Y, \mathcal{U})$ să fie spaţiu T_1 nu este numai suficientă ci şi necesară pentru ca propoziţia 1.2 să fie adevărată, după cum se va vedea din exemplele următoare.

Exemplul 1.1. Fie $f:(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)\to(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$.

$$f(x)=\begin{cases} x & x\leqslant 1 \\ 2 & x>1 \end{cases}$$

unde $\mathbb{R}$ este mulțimea numerelor reale iar $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_s$ topologia uzuală, respectiv topologia superioară pe $\mathbf{R}$. Se știe că $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ este un spațiu T_0 dar nu este T_1. Se verifică ușor că f este p^* — continuă. Totuși f este discontinuă în punctul $x_0=1$ pentru că există $V_{f(1)}=\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ cu proprietatea că $f^{-1}(V_{f(1)})=(-\infty, 1]$ nu este o vecinătate a lui $x_0=1$ în topologia uzuală.

Exemplul 1.2. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic oarecare cu $\mathcal{T}\neq\mathcal{P}(X)$, iar $(Y, \mathcal{U})$ un spațiu topologic care nu este spațiu T_1 și $\mathcal{U}\neq\{\varnothing, Y\}$. Vom presupune de asemenea că Y are cel puțin două elemente. Deoarece $\mathcal{T}\neq\mathcal{P}(X)$ rezultă că există $x_0\in X$ astfel încît $\{x_0\}\notin\mathcal{T}$. Din ipoteza că $(Y, \mathcal{U})$ nu este spațiu T_1 rezultă că există $y_0\in Y$ astfel ca $\overline{\{y_0\}}\neq\{y_0\}$, deci există $z_0\in Y$, $z_0\in\overline{\{y_0\}}\setminus\{y_0\}$, adică există o vecinătate a lui y_0, $V^0_{y_0}$, care nu-l conține pe z_0. Funcția $f:(X, \mathcal{T})\to(Y, \mathcal{U})$

$$f(x)=\begin{cases} y_0 & x=x_0 \\ z_0 & x\neq x_0 \end{cases}$$

este p^* — continuă dar nu e continuă în x_0. Într-adevăr, fie A, $B\subseteq X$ astfel ca $\bar{A}\cap\bar{B}\neq\varnothing$.

Dacă $x_0\in A\cap B$ atunci $y_0=f(x_0)\in f(A)\cap f(B)\subseteq\overline{f(A)}\cap\overline{f(B)}$.

Dacă $x_0\in A$ și $x_0\notin B$, cum A și B nu pot fi vide, rezultă că $y_0\in f(A)$ și $z_0\in f(B)$, deci $\overline{f(A)}\supset\overline{\{y_0\}}\ni z_0$, adică $z_0\in\overline{f(A)}\cap\overline{f(B)}$.

Dacă $x_0\notin A$ și $x_0\in B$ rezultă analog că $z_0\in\overline{f(A)}\cap\overline{f(B)}$.

Dacă $x_0\notin A\cup B$ rezultă că $z_0\in f(A)\cap f(B)\subseteq\overline{f(A)}\cap\overline{f(B)}$. Deci în toate cazurile posibile $\overline{f(A)}\cap\overline{f(B)}\neq\varnothing$, adică f este p^* — continuă.
Cum există $V^0_{y_0}=V^0_{f(x_0)}$ astfel ca $\forall\ V\in\mathcal{U}_{x_0}$, $f(V)\not\subset V^0_{f(x_0)}$ (deoarece $V\in\mathcal{U}_{x_0}$ implică existența unei deschise G astfel ca $x_0\in G\subset V$ și cum $\{x_0\}\notin\mathcal{T}$ rezultă că $f(G)$ conține pe z_0 care nu este în $V^0_{f(x_0)}$), f este discontinuă în x_0.

2. Vom stabili în continuare legăturile dintre p^* — continuitate și uniform continuitate, respectiv p — continuitate.

În cele ce urmează $(X, \mathfrak{H})$ și $(Y, \mathfrak{K})$ vor fi spații uniforme, iar (X, δ) și (Y, δ_1) spații de proximitate ([1]).

Propoziția 2.1. Dacă $f:(X, \mathfrak{H})\to(Y, \mathfrak{K})$ este uniform continuă, atunci este p^* — continuă de la $(X, \mathcal{T}_{\mathfrak{H}})$ la $(Y, \mathcal{T}_{\mathfrak{K}})$.

Demonstrația este imediată folosind propoziția 1.1 și rezultatul cunoscut că orice funcție uniform continuă între două spații uniforme este continuă între spațiile topologice corespunzătoare (a se vedea de exemplu teorema 20.5 din [1]).

Propoziția 2.2. Dacă $(Y, \mathfrak{K})$ este un spațiu uniform separat, spațiul topologic $(X, \mathcal{T}_{\mathfrak{H}})$ este bicompact, iar $f:(X, \mathcal{T}_{\mathfrak{H}})\to(Y, \mathcal{T}_{\mathfrak{K}})$ este p^* — continuă, atunci $f:(X, \mathfrak{H})\to(Y, \mathfrak{K})$ este uniform continuă.

Demonstrație. Deoarece $(Y, \mathfrak{K})$ este separat rezultă că $(Y, \mathcal{T}_{\mathfrak{K}})$ este spațiu T_2 și folosind propoziția 1.2 rezultă că f este continuă. Conform teoremei 20.37 din [1] rezultă că f este uniform continuă de la $(X, \mathfrak{H})$ la $(Y, \mathfrak{K})$.

Propoziția 2.3. Dacă $f:(X, \delta)\to(Y, \delta_1)$ este p — continuă, atunci $f:(X, \mathcal{T}_\delta)\to(Y, \mathcal{T}_{\delta_1})$ este p^* — continuă.

Demonstrație. Vezi teorema 21.13 din [1] și propoziția 1.1.

Propoziția 2.4. Dacă $f:(X, \mathcal{T}_\delta)\to(Y, \mathcal{T}_{\delta_1})$ este p^* — continuă iar $(X, \mathcal{T}_\delta)$ este spațiu T_4, atunci f este p — continuă de la (X, δ) la (Y, δ_1).

Demonstrație. Fie $A, B\subseteq X$ cu $A\delta B$. Conform teoremei 21.10 din [1] rezultă că $\bar{A}\cap\bar{B}\neq\varnothing$, iar din (1.1) rezultă $\overline{f(A)}\cap\overline{f(B)}\neq\varnothing$. Din definiția relației de proximitate rezultă că $\overline{f(A)}\,\delta_1\,\overline{f(B)}$, iar din teorema 21.9 din [1] rezultă $f(A)\,\delta_1\,f(B)$, adică f este p — continuă.

BIBLIOGRAFIE

1. W. J. Thron — Topological structures Holt Rinehart. 1966.
2. Takashi Noiri — Properties of θ — continuous functions. Lincei. Rend. Sc. fis mat. e. nat. Vol. LVIII — 1975, 887—891.
3. Paul F. Long, T. R. Hambelt-H — continuous functions, Bolletino della Unione Matematica Italiana 4 (11), 1975, 552—558.

p^* — CONTINUOUS FUNCTIONS

SUMMARY

In this note on introduce the notion of p^* — continuity for a functions between two arbitrary topological spaces. In the second section on studies relations between p^* — continuity and uniform continuity respective p — continuity.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 2 —1980**

FIBRATE VECTORIALE DIFERENŢIABILE COMPATIBILE CU BAZA FIBRATULUI

DE

RADU FLORIAN

Definiţia 1. Fie $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas C^p — diferenţiabil al varietăţii C^p — diferenţiabile X modelată pe spaţiul Banach E, $(U_i, \tau_i, E)_{i\in I}$ un atlas C^p — diferenţiabil al fibratului vectorial C^p — diferenţiabil π ; $M\to X$ de fibră tip E. Fibratul vectorial C^p — diferenţiabil π ; $M\to X$ este compatibil cu structura diferenţiabilă a varietăţii X dacă oricare ar fi $x\in X$, $u\in u^{-1}(x)$

$$\mathrm{d}\,(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}\,\tau_{ix}\,(u)=\tau_{jx}\,(u) \tag{1}$$

Propoziţia 1. Dacă M ; $M\to X$ este un fibrat vectorial diferenţiabil compatibil cu structura diferenţiabile a varietăţii C^p — diferenţiabile X atunci orice element al varierăţii C^p — diferenţiabilc M defineşte o formă liniară pe $F_x^p(X)$ — algebra funcţiilor C^p — diferenţiabile definite pe vecinătăţi ale elementului $x\in X$.

Demonstraţie. Fie $u\in M$ şi $\pi(u)=x\,(u\in\pi^{-1}(x))$. Se consideră izomorfismul liniar τ_{ix} ; $\pi^{-1}(x)\to E$ indus de harta vectorială τ_i ; $\pi^{-1}(U_i)\to U_i\times E$ asociată hărţii locale (U_i, φ_i) a varietăţii C^p — diferenţiabilă în $x\in X$ şi $f\in F_x^p(X)$. Se consideră aplicaţia $\tilde{u}: F_x^p(X)\to R$ definită astfel :

$$\tilde{u}\,(f)=d\,(f\circ\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}\,\tau_{ix}\,(u),\quad f\in F_x^p\,(X).$$

Dacă (U_j, φ_j) este o hartă locală a varietăţii C^p — diferenţiabilă X diferită de precedenta şi τ_j ; $\pi^{-1}(U_j)\to U_j\times E$ harta vectorială a fibratului vectorial indusă de (U_j, φ_j) atunci ;

$$\mathrm{d}\,(f\circ\varphi_j^{-1})_{\varphi_j(x)}\,\tau_{jx}\,(u)=\mathrm{d}\,(f\circ\varphi_i^{-1}\circ\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})_{\varphi_j(x)}\,\tau_{jx}\,(u)=$$

$$=\mathrm{d}\,(f\circ\varphi_j^{-1})_{\varphi_i(x)}=\mathrm{d}\,(\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})_{\varphi_j(x)}\,\tau_{jx}\,(u) \tag{2}$$

Ţinînd cont că π ; $M\to X$ este un C^p — fibrat vectorial compatibil cu varietatea C^p — diferenţiabilă X, adică $\mathrm{d}\,(\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})_{\varphi_j(x)}\,\tau_{jx}\,(u)=\tau_{ix}\,(u)$ din (2) rezultă că ;

$$\mathrm{d}\,(f\circ\varphi_j^{-1})_{\varphi_j(x)}\,\tau_{jx}\,(u)=\mathrm{d}\,(f\circ\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}\,\tau_{ix}\,(u)$$

şi deci aplicaţia $\tilde{u}$; $F_x^p(X)\to R$ nu depinde de harta vectorială a C^p — fibratului vectorial π ; $M\to X$.

Utilizînd proprietăţile diferenţialei Fréchét rezultă că $\tilde{u}$; $F_x^p(X)\to R$ este o formă liniară pe $F_x^p(X)$ şi satisface condiţiile ;

a) $\tilde{u}\,(f\,g)=f\,(x)\,\tilde{u}\,(g)+g\,(x)\,\tilde{u}\,(f)$

b) Fie $f : U \to R$ și $V \subset U$ atunci $\tilde{u}(f_{/V}) = \tilde{u}(f)$

c) $(\tilde{u}+\tilde{v})(f) = \tilde{u}(f) + \tilde{v}(f)$, $\forall$, f, $g \in F_x^p(X)$; u, $v \in M$

Propoziția 2. Fie X o varietate C^p diferențiabilă modelată pe spațiul Banach E. Fibratul tangent asociat varietății C^p diferențiabilă X este un C^p — fibrat vectorial compatibil cu structura C^p — diferențiabilă a varietății X.

Definiția 2. Fibratele vectoriale C^p — diferențiabile $\pi : M \to X$ și $\pi' : M' \to X'$ sînt C^p — compatibile în raport cu C^p — morfismul $h : X \to X'$ dacă există C^p — morfismul $H : M \to M'$ astfel încît cuplul (H, h) să fie un FV — morfism de C^p — fibrat e vectoriale.

Propoziția 3. Dacă $\pi : M \to X$ și $\pi' : M' \to X'$ sînt fibrate vectoriale C^p — diferențiabile compatibile respectiv cu structurile varietăților C^p — diferențiabile X și X' atunci $\pi : M \to X$ și $\pi' : M' \to X'$ sînt fibrate vectoriale C^p — diferențiabile compatibile cu orice C^p — morfism $h : X \to X'$.

Demonstrație. Conform teoremei de construcție a $F.\ V$ — morfismelor trebuie să definim pentru orice $x \in X$ o aplicație liniară $H_x : \pi_x \to \pi'_{h(x)}$ astfel ca condiția $F.\ V.\ 2$ a definiției $F.\ V$ — morfismului să fie satisfăcută.

Fie $\alpha : \pi^{-1}(U) \to U \times E$ și $\alpha' : \pi'^{-1}(U') \to U' \times E$ două hărți vectoriale în $x \in M$ și $h(x)$. Definim aplicația liniară $H_x : \pi_x \to \pi'_{h(x)}$ astfel :

$$H_x = \alpha'^{-1}_{h(x)} \circ d(\varphi' \circ h \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \cdot \alpha_x$$

se consideră hărțile vectoriale $\beta : \pi^{-1}(U) \to U \times E$ și $\beta' : \pi'^{-1}(U') - U' \times E$ asociate hărților locale (U, ψ) și (U', ψ') ale varietății C^p — diferențiabile X. Ținînd cont că $d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ \alpha_x = \beta_x$ și $\alpha'^{-1}_{h(x)} \circ d(\varphi' \circ \psi')^{-1})'_{\psi(x)} = \beta'^{-1}_{h(x)} \cdot (\pi : M \to X$ și $\pi' : M' \to X'$
fiind C^p — fibrate vectoriale compatibile cu varietățile de bază) rezultă că definiția nu depinde de hărțile vectoriale considerate și condiția $F.\ V2$ a FV morfismului fiind îndeplinită deoarece toate aplicațiile considerate sînt C^p — diferențiabile

BIBLIOGRAFIE

1. Lang S., Introduction to Differentibile Manifolds, Interseience, New York, 1962.
2. Pham Mau Quan., Introduction à la géometrie des variétés différentiables, Dunod, Paris, 1969.
3. Gheorghiev G., Oproiu V., Varietăți diferențiabile finit și infinit dimensionale, Edit. Academiei, 1976.

FIBRÉS VECTORIELS DIFFÉRENTIABLES COMPATIBLES AVEC LA BASSE OF FIBRE

RÈSUMÈ

Dans ouvrage on introduire la notion de fibré vectoriel compatible avec la structure differentiable á la basse de fibré vectoriel qui permet interpréter des les elements de l'éspace total fibre vectoriel comme les formes lineaires sur $F_x^p(X)$.

On defini depuis la notion de C^p — morfisme vectoriel compatible par raport avec une C^p — morfism.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 2 —1980**

ASUPRA PRODUSELOR FILTRATE DE CONGRUENTE

DE

CARMENCITA UROSU

1. În lucrare se consideră algebre universale similare de tipul τ dintr-o clasă ecuaţională $\mathcal{V}$. Fie familia de algebre $\{U\}_{i\in I}$ şi $U_i=<A_i, \Omega>$, Ω fiind un domeniu de operaţii finitare. Vom considera laticea $(\mathcal{P}(I), \subseteq)$ şi vom nota cu $\mathcal{F}(\mathcal{P}(I))$ idealul filtrelor (ideale duale) acestei latici. Conform teoremei lui Stone [1] acest ideal este o latice distributivă.

În [2] sînt caracterizate clasele ecuaţionale care au proprietatea că fiecare congruenţă pe un produs direct $A\times B$ este un produs de congruenţe pe algebrele factori A şi B. Pe un produs infinit nu toate congruenţele sînt produse de congruenţe pe algebrele factori. Considerăm următorul contraexemplu : fie F filtrul mulţimilor cofinite ale laticei $\mathcal{P}(I)$, $\theta_i\in\mathcal{C}(U_i)$, $i\in I$ şi $\theta\in\mathcal{C}(\prod_{i\in j} U_i)$ astfel ca :

$$(a,\ b)\in\theta<=>\{i\mid (a(i),\ b(i))\in\theta_i\}\in F.$$

Este evident că o astfel de congruenţă (congruenţă filtru) pe $\prod_{i\in j} U_i$ nu este produs de congruenţa pe algebrele factori.

În [3] se generalizează noţiunea de produs de congruenţă pentru produse directe infinite de algebre.

Definiţia 1.

Se numeşte produs filtrat al familiei de congruenţe $\theta_i\in\mathcal{C}(U_i)$, congruenţa $\Pi_F\theta_i\in\mathcal{C}(\prod_{i\in I} U_i)$ definită astfel :

$$(a,\ b)\in\Pi_F\theta_i<=>\{i\mid (a(i),\ b(i))\in\theta_i\}\in F,\ F\in\mathcal{F}(\mathcal{P}(I)).$$

Vom nota mulţimea congruenţelor care sînt produse filtrate pe algebra $\prod_{i\in I} U_i$, prin $\mathcal{C}_f(\prod_{i\in I} U_i)$.

Propoziţia 1.

$\mathcal{C}_f(\prod_{i\in I} U_i)$ este o subsemilatice (relativ la $\wedge$) a laticei $\mathcal{C}(\prod_{i\in I} U_i)$

Demonstraţie.

Dacă $\theta_1,\ \theta_2\in\mathcal{C}_f(\prod_{i\in I} U_i)$ rezultă că există $F_1,\ F_2\in\mathcal{F}(\mathcal{P}(I))$ astfel ca $\theta_1=\Pi_{F_1}\theta_i$ şi $\theta_2=\Pi_{F_1}\theta_i'$ unde $\theta_i,\ \theta_i'\in\mathcal{C}(U_i)$, $i\in I$.

Avem :

$$(a,\ b) \in \theta_1 <=> \{i \mid (a(i)\ b(i)) \in \theta_i\} \in F_1$$

$$(\alpha,\ \beta) \in \theta_2 <=> \{i \mid (\alpha(i),\ \beta(i)) \in \theta_i'\} \in F_2$$

Considerînd în laticea $\mathcal{C}(\prod_{i\in I} U_i)$ congruența $\theta_1 \wedge \theta_2$, are loc condiția :

$$(a,\ b) \in (\theta_1 \wedge \theta_2) \Leftrightarrow \{i \mid (a(i),\ b(i)) \in \theta_i \wedge \theta_i'\} \in F_1 \wedge \sigma_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{P}(I))$$

Deci are loc relația :

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \Pi_{F_1 \wedge F_2}(\theta_i \wedge \theta_i') \in \mathcal{C}_f(\prod_{i\in I} U_i)$$

Relativ la operația „V" în $\mathcal{C}(\prod_{i\in I} U_i)$, are loc relația :

$$\Pi_{F_1}\theta_i \vee \Pi_{F_2}\theta_i' \leqslant \Pi_{F_1 \vee F_2}(\theta_i \vee \theta_i') \tag{1}$$

deoarece : $(c,\ d) \in \theta_1 \vee \theta_2 \Leftrightarrow$ există șirul finit $a_0 = c,\ a_1, \ldots, a_n = d$ și avem :

$$a_{j-1} \equiv a_j\ (\theta_1) \Leftrightarrow \{i \mid (a_{j-1}(i),\ a_j(i)) \in \theta_i\} \in F_1 \text{ pentru } j \text{ par}$$

$$a_{j\leqslant 1} \equiv a_j\ (\theta_2) \Leftrightarrow \{i \mid (a_{j-1}(i),\ a_j(i)) \in \theta_i'\} \in F_2 \text{ pentru } j \text{ impar}$$

Deci : $\{i \mid (a_{j-1}(i),\ a_j(i)) \in \theta_i \vee \theta_i'\} \in F_1 \vee F_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{P}(I))$ ceea ce demonstrează afirmația (1).

Astfel $\mathcal{C}_f(\prod_{i\in I} U_i)$ este o subsemilatice (relativ la $\wedge$) a laticei $\mathcal{C}(\prod_{i\in I} U_i)$.

Observații.

1) Pentru o familie de congruențe $\theta_i \in \mathcal{C}(\prod_{i\in I} U_i)$, corespondența :

$$F \in \mathcal{F}(\mathcal{P}(I)) \longmapsto \theta = \Pi_F\ \theta_i$$

nu este injectivă deoarece ; $F_1 \subset F_2 \not\Rightarrow \Pi_{F_1}\theta_i \subset \Pi_{F_2}\theta_i$.

2) Dacă $F = \mathcal{P}(I)$ atunci $\theta = \Pi_{\mathfrak{Z}(I)}\theta_i = \tau \prod_{i\in I} U_i$

3) Fie $\mathcal{F}_0(\mathcal{P}(I))$ mulțimea filtrelor principale în laticea $\mathcal{P}(I)$. $\mathcal{F}_0(\mathcal{P}(I))$ este o sublatice a laticei $\mathcal{F}(\mathcal{P}(I))$, izomorfă cu $\mathcal{P}(I)$. Au loc relațiile.

$$\Pi_{[A)}\ \theta_i \wedge \Pi_{[B)}\ \theta_i = \Pi_{[A \wedge B)}\ \theta_i$$

$$\Pi_{[A)}\ \theta_i \vee \Pi_{[B)}\ \theta_i \leqslant \Pi_{[A \vee B)}\ \theta_i$$

II. Fie $\mathcal{C}_m(U)$ mulțimea congruențelor maximale proprii pentru o algebră $U \in \mathcal{V}$. Elementele mulțimii $\mathcal{C}_m(U)$ sînt co-atomi în laticea $\mathcal{C}(U)$.

Algebrele factor U/θ unde $\theta \in \mathcal{C}_m(U)$ sînt algebre simple și deci orice congruență pe algebra $\prod_{\theta\in\mathcal{C}_m(u)} (U/\theta)$ care este produs filtrat, este o congruență filtru.

Definiția 2.

O algebră se numește semi-simplă dacă $\wedge \mathcal{C}_m(U) = \omega_u \cdot /$

Fie $\mathcal{K}$ filtrul submulțimilor cofinite ale mulțimii $\mathcal{C}_m(U)$.

Lema 1.

Are loc relaţia :

$$\theta = \vee \{\wedge B \mid B \in \mathcal{K}\} = \tau$$

Demonstraţie.

Dacă $\rho \in \mathcal{C}_m(U)$, avem satisfăcută condiţia :

$$\wedge(\mathcal{C}_m(U) - \{\rho\}) \not\leqslant \rho$$

şi deci $\theta \not\leqslant \rho$ de unde rezultă că $\theta = \tau_u$.

Deoarece laticea $\mathcal{C}(U)$ este o latice algebrică, adică o latice care este completă şi în care fiecare element este o reuniune de elemente compacte, rezultă că are loc următoarea proprietate.

Lema 2.

Dacă B este o submulţime dirijată superior în laticea $\mathcal{C}(U)$, atunci pentru orice $\theta \in \mathcal{C}(U)$ avem satisfăcută relaţia :

$$\theta \wedge (\vee B) = \vee \{\theta \wedge \rho \mid \rho \in B\}./$$

Are loc următoarea teoremă :

Teorema 1.

Pentru o algebră U, avînd laticea $\mathcal{C}(U)$ modulată, $\mathcal{C}(U)$ este o algebră Boole d. şi n.d. au loc condiţiile :

(a) U este semi-simplă

(b) pentru orice $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \in \mathcal{C}(U)$, laticea $\mathcal{C}(U)\ \rho_1 \wedge \ldots \wedge \rho_n)$ este distributivă.

Demonstraţie.

Dacă $\mathcal{C}(U)$ este o algebră Boole evident are loc condiţia (b). De asemenea rezultă că elementele ireductibile în intersecţie ($\wedge$) din laticea $\mathcal{C}(U)$ sînt precise elementele mulţimii $\mathcal{C}_m(U)$. Deci are loc condiţia (a) deoarece $\wedge \mathcal{C}_m(U) = \omega_u$.

Reciproc, presupunem $B \in \mathcal{K}$ şi $\wedge B \neq \omega_u$. atunci $\mathcal{C}_m(U) - B$ este o mulţime nevidă finită :

$$\mathcal{C}_m(U) - B = \{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n\}$$

Deoarece algebra U este semi-simplă, are loc relaţia :

$$(\wedge B) \wedge (\rho_1 \wedge \ldots \wedge \rho_n) = \omega_u$$

$\mathcal{C}(U)$ fiind modulară, intervalele : $\wedge B/\omega_u$ şi $(\rho_1 \wedge \ldots \wedge \rho_n) \vee (\wedge B)/\rho_1 \wedge \ldots \ldots \wedge \rho_n$ sînt izomorfe. Dar intervalul $\tau_u/\rho_1 \wedge \ldots \wedge \rho_n$ este o latice Boole finită deoarece are loc condiţia (b). Rezultă că intervalul $\wedge B/\omega_u$ este o latice Boole finită.

Pentru orice $\theta \in \mathcal{C}(U)$ vom avea conform lamelor I şi 2, următoarea relaţie :

$$\theta = \vee \{\theta \wedge \wedge B \mid B \in \mathcal{K}\}$$

Considerăm un element $\rho \in \mathcal{C}(U)$ de înălţime finită în această latice. Atunci, pentru $B_i \in \mathcal{K}$, $i = \overline{1, n}$ are loc relaţia :

$$\rho = (\rho \wedge \wedge B_1) \vee \ldots \vee (\rho_1 \wedge B_n)$$

Deci $\rho = \rho \wedge \wedge (B_1 \cap \ldots \cap B_n)$, unde $B_1 \cap \ldots \cap B_n \in \mathcal{K}$ iar intervalul ρ/ω_u este o latice Boole.

Pentru fiecare congruență $\theta \in \mathcal{C}(U)$ are loc relația :

$$\theta = \vee \{\rho \leqslant \theta / \rho \text{ este un atom}\}.$$

Fie o mulțime de atomi C astfel ca $\theta = \vee C$. Dacă ρ este un atom și $\rho \notin C$, atunci deoarece $\rho \vee \vee B/\omega_U$ este un interval distributiv (elementul $\rho \vee \vee B$ fiind de înălțime finită), are loc relația :

$$\rho \vee \vee C = \rho \vee \vee \{\vee B / B \subseteq C,\ B\text{-finit}\} = \vee \{\rho \vee \vee B / B \subseteq C,\ B\text{-finit}\} = \omega_U.$$

Fiecare $\theta \in \mathcal{C}(U)$ este în mod unic reprezentată ca reuniune de atomi și are loc izomorfismul :

$$\mathcal{C}(U) \cong \prod_{\theta \in \mathcal{C}_m(u)} [\theta,\ \tau_u] \cong 2^{\mathcal{C}_m(u)}$$

dat de $f(\rho)(\theta) = \theta \vee \rho$.

Conform teoremei I și propoziției 2 [3], se obține următorul rezultat :

Teorema 2.

Dacă algebra U finită este semi-simplă și pentru orice congruențe $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \in \mathcal{C}(U)$ avem că laticea $\mathcal{C}(U/\rho_1 \wedge \ldots \wedge \rho_n)$ este distributivă atunci orice congruență pe algebra U^I este o intersecție de produse filtrate de congruențe pe U.

BIBLIOGRAFIE

[1] P. Crawley and R. P. Dilworth: Algebraic Theory of Lattices, Prentice — Hall, Inc. Englewood, New Jersey 1973.

[2] G. Fraser and A. Horn: Congruences relations in direct products, Proc. Amer. Math. Soc., 26 (1970), 390–394.

[3] Evelyn Nelson: Filtered products of congruences, Algebra Universalis, Vol. 8 (1978), 266.268.

[4] Heinrich Werner: Congruences on products of algebras and functionally complete algebras, Algebra Universalis, Vol. 4/1 (1974) 99–105.

SUR LES PRUDUITS FILTRES DES CONGRUENCES

RÈSUMÈ

Dans le travail on étudie la correspondance entre les produits filtres des congruences sur l'algèbre produit $\prod_{i \in I} U_i$ et les filtres de latice $\mathcal{P}(I)$. En case des algèbres semi-simples sont étudiées des conditions de laquelle touts les congruences sur l'algèbre U^I sont produits filtres des congruences sur U.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) **Fascicola 2 —1980**

QUANTUM-STATISTICAL ASPECTS IN PERIPHERAL COLLISIONS

BY

V. T. DOROBANŢU

1. Introduction.

During the last few years, a new type of heavy-ion reactions has been observed at Orsay [1, 2, 3], Berkelay [4, 5], and Dubna [6, 7], reactions which are referred to as quasi-fission, strongly damped collisions or deepinelastic scattering. Mainly this kind of reactions which bridge the direct and compound reactions are characterized by following properties :

i) a large number of nucleons can be transferred

ii) a large amount of relative kinetic energy is dissipated into internal excitations of the colliding nuclei, within less than 10^{-21} sec.

iii) the angular distribution is strongly non-isotropic

iv) because of the extremely large number of the open channals, one can observe averaged quantities, only

v) the cross-section for deeply inelastic collisions increases with increasing bombarding energy and mass of the colliding nuclei

In oder to have such kind of reactions, incident energies of 1 to 2 MeV per nucleon above the Coulomb barrier is needed. In describing the deep-inelastic scattering one tries to introduce friction forces into classical equation of motion [8, 9], on the one hand, and to apply quantum-statical methods to nuclear problems [10, 11, 12, 13, 14], on the other hand.

The classical treatment is motivated by the fact that the wave lengths involved by the process are rather short, e.g. $\lambda \simeq 0.1$ fm for Ar on Th, at only 50 MeV above the Coulomb barrier, while quantum-statistical model is supported by the intrinsec nature of the reaction.

Since the peripheral collisions may be considered as a non-equilibrium process, they can be treated according to the methods applied to such processes.

2. Basic concepts.

As known [15] a non-equilibrium process consists in having a quantum system far from equilibrium, because of its coupling to other quantum systems with which it may exchange energy, mass, momentum etc. Therefore we have to do with a proper system coupled to a „heatbath". In the case of deeply inelastic collisions, the proper system may be the intermediate complex, and the „heatbath" the matter in which it is evolving. Since we are interested in pro-

perties of the proper system, one can choose one of the following ways, to attack the problem :

i) the total system is described by the density matrix equation in the Schrödinger picture, leading to an equation for the reduced density matrix.

ii) the total system is described by the Heisenberg equation of motion for a suitable set of operators, leading to the quantum mechanical Langevin equation.

Since, what we obtain experimentally, are macroscopic quantities a coresspondence between quantum mechanical and classical quantities is needed, namely, to quantum mechanical density matrix equation corresponds the classical stochastic equation — generalized or ordinary Fokker-Planck equation — so, we must find a way to get the stochastic equation starting from a quantum mechanical equation.

3. Starting from the Schrödinger equation.

This method has been used by Nörenberg [10] considering that the wave function of the system can be expanded in the form

$$| \psi (t) > = \sum_i a_i (t) \, | \Phi_i (t) > \tag{1}$$

One can insert this expression into a time-dependent Schrödinger equation and finds

$$i \frac{d}{dt} a_j (t) = \sum_i V_{ji} (t) \; a_i (t) \tag{2}$$

For the density matrix

$$\rho_{ji} (t) \equiv a_j (t) \; a_i^* (t)$$

one gets a von Neumann equation. Further, introducing the coarsegraining operators — projection operators — one can derive from the von Neumann or Liouville equation an equation of motion for the macroscopic occupation probabilities, defined as

$$P_\mu (t) = \sum_m \rho_{mm} (t)$$

After some calculations the following equation is obtained

$$\frac{\partial P (y, t)}{\partial t} = \int d^2 y' \, w (y, y' ; t) \, [\rho (y) \; P (y', t) - \rho (y') \; P (y, t)] \tag{3}$$

where $w (y, y', t)$ is the transition probability between two subsets, and $\rho (y)$ is the level density. If $w (y, y', t)$ is essentially different from zero only near $y = y'$ one expand $P (y', t)$ and $\rho (y')$ in (3) around $y = y'$ and retaining only terms up to second order, gets

$$\frac{\partial P (y, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} [\mathcal{A}_i (y, t) \; P (y, t)] + \sum_{i, j=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [D_{ij} (y, t) \; P (y, t)] \tag{4}$$

with

$$\mathcal{A}_i = 2 \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial D_{ij} (y, t)}{\partial y_j} - \rho (y) \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \mu_{ij} (y, t)}{\partial y_j} \tag{5}$$

$$D_{ij}(y,\ t)=\rho(y)\ \mu_{ij}(y,\ t)=D_{ij}(y,\ t) \tag{6}$$

and

$$\mu_{ij}(Y,\ t)=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2\eta\ w(Y,\ \eta\ ;\ t)\ \eta_i\eta_j \tag{7}$$

4. **Starting from the Heisenberg equation.**

Since the motion of quantum system in the Heisenberg representation is a motion of the dynamic variables of the corresponding operators, the derivation of the stochastic equation is much more „transparent". Indeed, if Ω is an arbitrary operator which does not explicitely depend on time, and H is the hamiltonian of the process, the Heisenberg equation of motion can be written as

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=[\Omega,\ H] \tag{8}$$

For coordinate and momentum operators we have the following Heisenberg equations of motion

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{q}}{i\hbar}[q,\ H]=\frac{\partial H}{\partial p} \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{i\hbar}[p,\ H]=-\frac{\partial H}{\partial q}\,. \tag{10}$$

Gennerally, if we let q stands for both coordinates and momenta and interpret K and $A\cdot h$ as suitable derivatives of the Hamiltonian, the equation of motion for the intermediate complex reads

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=K(q,\ t)+A(q,\ t)\cdot h(t) \tag{11}$$

where K may be a time-dependent „force" and A describes the strength of coupling to the „heatbath" coordinates h. Also, the equation of motion for the matter in which the intermediate complex moves is

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=C\cdot h-B(q) \tag{12}$$

where C is a constant matrix and B may depend in an arbitrary way on q, Inserting the solution of the equation (12) into (11) one gets the generalized Langevin equation

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=K(q,\ t)+A(q,\ t)\ C^{-1}\ B(q)-\int_0^t A(q,\ t)\ \exp\ [C(t-\tau)\ C^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial B_i}{\partial q_j}\bigg|_{t=\tau}\right)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=\tau}\mathrm{d}\tau+A(q,\ t)\ \exp\ C\ t\,[h(0)-C^{-1}\ B(q(0))] \tag{13}$$

where $\left(\frac{\partial B_i}{\partial q_j}\Big|_{s=\tau}\right)$ is a matrix and C^{-1} is the inverse of C

Here : $K(q,\ t)$ may be interpreted as initially present force $A(q,\ t)\ C^{-1}\ B(q)$ describing the additional interaction whithin the intermediate complex brought by the „heatbath". The integral can be considered as a retarded interaction which may give rise to a frictional force. The last term is interpreted as a fluctuation force. If we restrict ourselves to a Langevin equation of the form

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=k_i(q)+\sum_{j=1}^{n}g_{ij}(q_i)\cdot F_j(t) \tag{14}$$

where q_i are the variables of the intermediate complex, k_i and g_{ij} functions of q and $F_j(t)$ a random function of t. One may show [16] that this equation is equivalent to the following Fokker-Planck equation :

$$\frac{\partial f[q_1(\tau),\ q_2(\tau),\ \ldots\ldots\ q_n(\tau);\ \tau \mid q_1(t),\ q_2(t),\ \ldots\ldots\ q_n(t);\ t]}{\partial t} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i} \{\nu_i[q_1(\tau),\ q_2(\tau),\ \ldots\ ,\ q_n(\tau)] \cdot f[q_1(\tau),\ q_1(\tau),\ \ldots\ q_n(\tau),\ \tau \mid$$

$$q_1(t),\ q_2(t),\ \ldots\ldots\ q_n(t),\ t]\} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} \{D_{ij}[q_1(\tau),\ q_2(\tau),\ \ldots$$

$$\ldots\ q_n(\tau)] \cdot f[q_1(\tau),\ q_2(\tau),\ \ldots\ q_n(\tau),\ \tau \mid q_1(t),\ q_2(t),\ \ldots\ldots\ q_n(t),\ t]\} \quad (15)$$

Here : $f[q_1(\tau),\ q_2(\tau),\ \ldots\ q_n(\tau),\ \tau \mid q_1(t),\ q_2(t),\ \ldots\ q_n(t),\ t]$
is the distribution probability function
$\nu_i[q_1(\tau),\ q_2(\tau),\ \ldots\ q_n(\tau)]$ is the drift vector defined by

$$\nu_i([q_1(\tau),\ q_2(\tau),\ \ldots\ q_n(\tau)] = \lim_{\tau \to t} \frac{1}{\tau - t} \langle q_i(\tau) - q_i(t) \rangle \quad (16)$$

and $D_{ij}[q_1(\tau),\ q_2(\tau),\ \ldots\ q_n(\tau)]$ is the diffusion matrix defined by

$$D_{ij}[q_1(\tau),\ q_2(\tau)\ \ldots\ q_n(\tau)] = \lim_{\tau \to t} \frac{1}{\tau - t} \langle [q_i(\tau) - q_i(t)]^2 \rangle \quad (17)$$

Knowing, the drift and diffusion coefficients, the stochastic Fokker — Planck equation (15) can be solved in some special cases As „order parameters" $q_1(\tau)$, $q_2(\tau)$, ... $q_n(\tau)$ one can choose, an adequate set of variables like energy, mass, angular momentum, charge.

REFERENCES

1. M. Lefort, C. Ngô, J. Peter, B. Tamain: Nucl. Phys. A 216, 166 (1973).
2. F. Hanappe, M. Lefort, C. Ngô, J. Peter, B. Tamain: Phys, Rev. Lett. 32, 738 (1974).
3. J. Peter, C. Ngô, B. Tamain: J. Physique, Lett. 36., L 23 (1975).
4. L. G. Moretto, D. Heunemann, R. C. Jared, R. C. Gatti, S. G. Thomson in: Physics and Chemistry of Fission 1973, Vol. 11, p 351 Vienne IAEA 1974.
5. K. L. Wolf, J. P. Unik, J. R. Huizenga, V. E. Viola, J. Birkelund, H. Freiesleben: Phys. Rev. Lett. 33, 1105 (1974).
6. A. G. Artukh, G. F. Gridnev, V. L. Miheev, V. V. Volkov, V. V. Wilczynski: Nucl. Phys. A 215, 91 (1973).
7. V. V. Volkov, in: Proc. of the Int . Conf. on Reactions. between Complex Nuclei, Nashville, 1974, eds. R. L. Robinson et al Vol. 2 p. 363, Amsterdam North-Holland 1974.
8. D. H. E. Gross, H. Kalinovski: Phys. Lett. 48 B, 302 (1974).
9. J. P. Bondorf M. I. Sobel, D. Sperber: Phys. Lett. C 15, 84 (1974).
10. W. Norenberg: Z. Physik A 274, 241 (1975).
11. S. Ayik, B. Shurmann, W. Nörenberg: Z. Physik A 277, 299 (1976).
12. S. Ayik, B. Shurmann, W. Nörenberg: Z. Physik A 279, 145 (1976).
13. B. Shurmann, W. Nörenberg, M. Simbel: Z. Physik A 286, 263 (1978).
14. S. Ayik, G, Wolschin, W. Nörenberg: Z. Physik A 286, 271 (1978).
15. H. Haken: Laser Theory Vol xx5/2c of Encyclopedia of Physics (Springer, Berlin).
16. R. L. Stratonovich: Topics in the Theory of Random Noise Vol 1 and II (Gordon and Breach, New York) 1963, 1967.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) Fascicola 2 —1980

CONSIDERAŢII TEORETICE ASUPRA ALEGERII DIMENSIUNILOR UNUI CONCENTRATOR SOLAR CILINDRIC DESTINAT UTILIZĂRILOR INDUSTRIALE

DE

COLETA DE SABATA

1. Introducere.

Obţinerea unor temperaturi relativ ridicate, necesare în utilizările industriale ale căldurii obţinute prin captarea energiei solare, impune folosirea unor concentratoare cu oglinzi metalice. Din formele posibile — sferice, parabolice, cilindrice, sau combinaţii ale lor, —cel mai bine convine, din punct de vedere a construcţiei, utilizarea unor concentratoare cilindirce, în a căror axă focală se poate aşeza convertorul sub forma unui set de tuburi, prin care circulă, continuu sau în impulsuri, agentul termic de preluare a căldurii.

Forma cilindrică a captatorului are avantajul unei tehnologii simple de construcţie şi dezavantajul aberaţiilor care scad mult randamentul teoretic al instalaţiei.

Aspectele teoretice care determină în final alegerea dimensiunilor captatorului, implică analiza mai multor factori, şi anume, cerinţele principale sînt :

— putere concentrată maximă

— construcţie relativ simplă, ieftină şi realizabilă cu materiale nedificitare

— reglare simplă a poziţiei instalaţiei în raport cu potiţia Soarelui pe cer

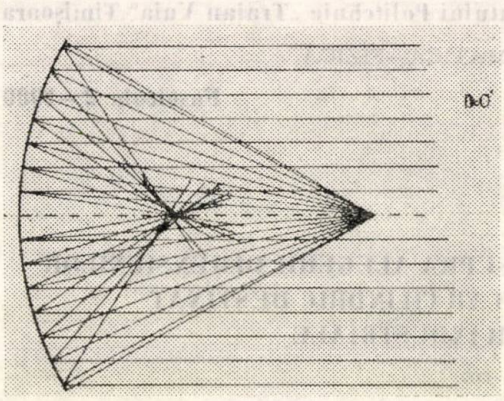
— durata zilnică de funcţionare cît mai mare

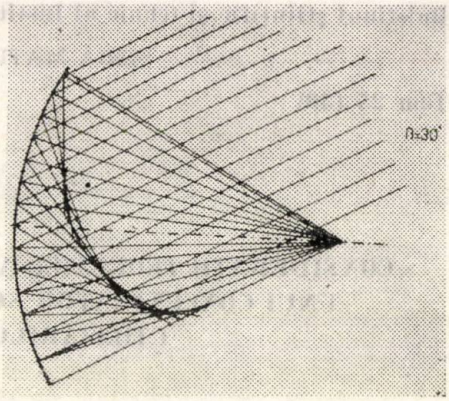
— durata medie anuală de funcţionare maximă

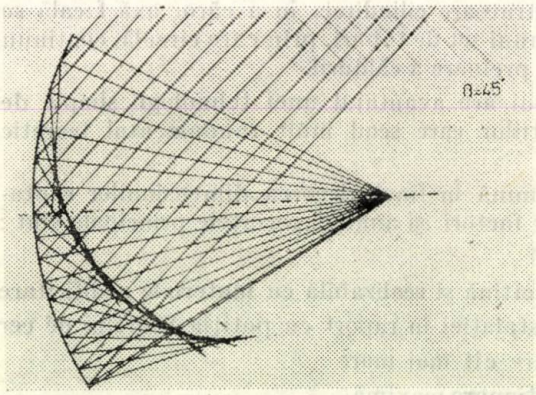
Este evident că aceste cerinţe nu se pot realiza simultan la valori optime deoarece intervin următoarele elemente : aberaţiile oglinzilor cilindrice pentru raze ce vin paralel cu axul optic principal dar nu îndeplinesc condiţia de paraxialitate ; deplasarea diurnă a Soarelui pe cer modifică în limite extrem de largi unghiul de incidenţă faţă de axul optic principal ; unghiul de înălţare a Soarelui pe cer la amiază în funcţie de perioada calendaristică — şi care la latitudinea noastră variază între 23° şi 68° — toate acestea determinînd o dispersare puternică a razelor reflectate de oglindă spre zona în care se află situat convertorul.

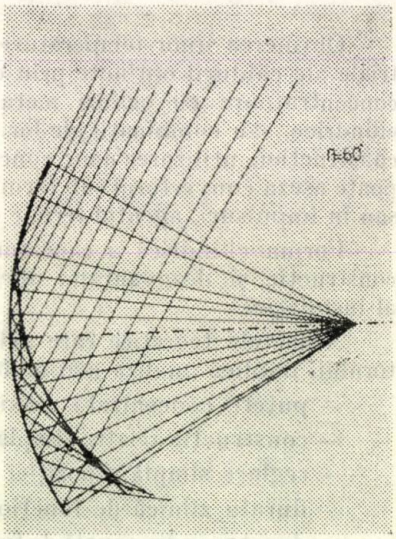
Locul geometric de intersecţie a razelor după interacţia cu suprafaţa oglinzii formează caustica focală, o curbă care ea însăşi se deplasează odată cu mişcarea Soarelui pe boltă (planşa nr. 1).

Construcţiile mari, capabile să determine puteri importante concentrate în zona focală, sînt greu de rotit după soare, acest lucru ar cere puteri importante şi un grad ridicat de automatizare.









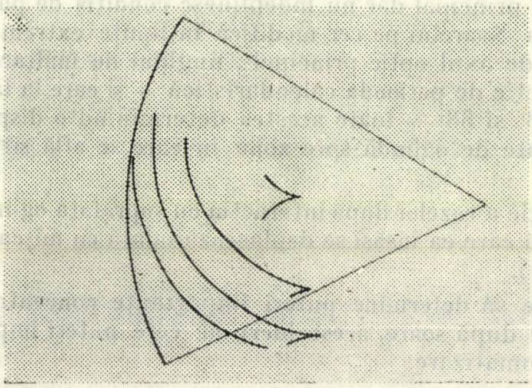


Fig. 1, 2, 3, 4 și 5. Modicarea causticii focale în funcție de înclinația razelor solare.

2. Aspecte geometrice.

Fie în fig. 6 o secțiune printr-o oglindă cilindrică de rază R și notăm cu α semideschiderea ei. Pentru razele ce nu îndeplinesc condiția de paraxialitate se formează aberațiile de sfericitate, longitudinală λ_∞ și transversală τ_∞. Considerații geometrice simple conduc la :

$$(x-R)^2+(y)^2=R^2 \qquad \begin{matrix} NF=b \\ NC=a. \end{matrix} \tag{1}$$

$$a=R/2\cdot\cos\alpha \qquad b=NC-R/2=R/2\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha} \tag{2}$$

$$\lambda_\infty=b=R/2\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha} \tag{3}$$

$$\tau_\infty=\lambda_\infty \operatorname{tg} 2\alpha. \tag{4}$$

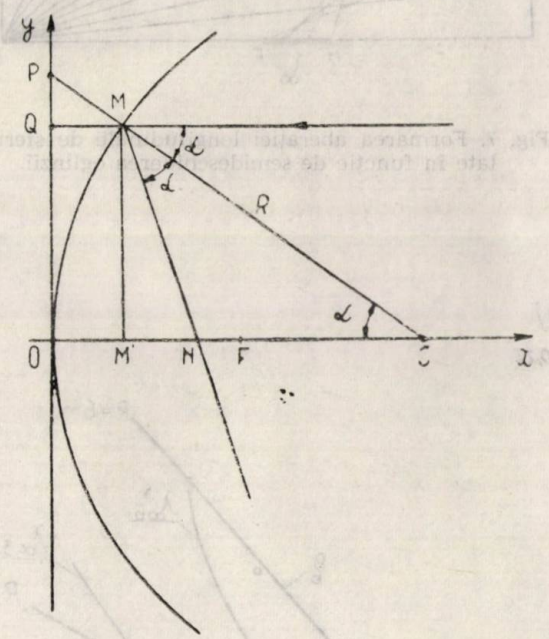


Fig. 6. Elementele geometrice ale oglinzii.

În calcule, semideschiderea a fost astfel aleasă încît segmentul $OQ=MM$ să fie fracție zecimală cu pasul 0,1 din raza R (Fig. 7). Valorile folosite sînt tabelate mai jos :

α_k°	6	12	17	23	30	37	53	64
$\operatorname{tg}\alpha_k^\circ$	0,10	0,22	0,312	0,435	0,575	0,750	1,33	2,00

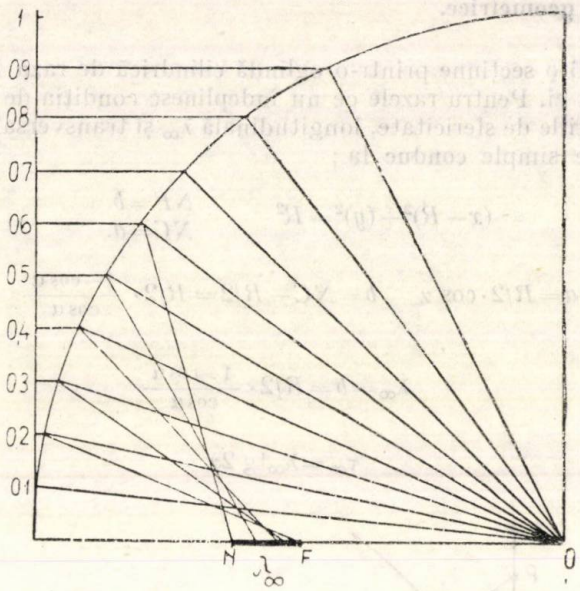


Fig. 7. Formarea aberației longitudinale de sfericitate în funcție de semideschiderea oglinzii.

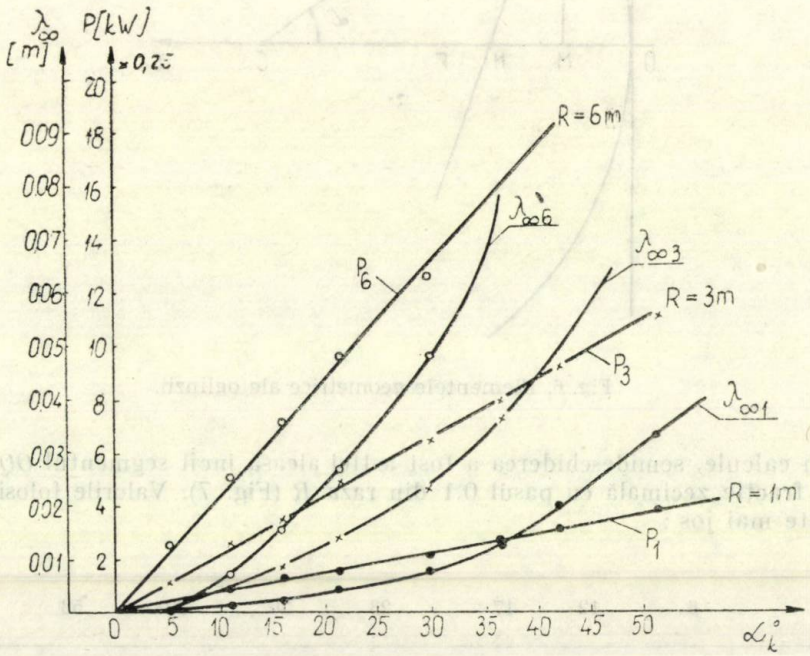


Fig. 8. Mărimea aberației longitudinale și puterile concentrate în zona focală în funcție de semideschiderea α și la raze de 1, 3, 6 m.

Calculele au fost făcute rulîndu-se un program pe calculatorul Felix C 256, din care s-au extras valorile care intereserză și care au fost tabelate în continuare. Notațiile corespund fig. 6 și au semnificațiile : $QO=y$, $NF=b$. Prin S_{xi} s-a notat suprafața ce corespunde aberației longitudinale la razele de 1, 3, 6 metri și unitatea de lungime a generatoarei.

În fig. 8 sînt sintetizate calculele și anume prin $\lambda_{\infty 1,\,3,\,6}$ s-a notat aberația longitudinală ce corespunde celor 3 raze alese pentru oglindă și prin $P_{1,\,3,\,6}$ puterile concentrate în zona focală în ipotezele de mai jos.

Admitem pentru cele trei luni de vară în medie o insolație de 1 000 W/m^2 și acceptăm un coeficient total de reflecție pe oglindă de 0,5. Puterile concentrate în zona focală, pentru unitatea de lungime a generatoarei și la deschiderile precizate ale oglinzii sînt tabelate mai jos, împreună cu aria corespunzătoare a zonei focale ținîndu-se seama numai de aberația longitudinală.

R_m		P kW/m	S_{zi} m^2
1	17	0,470	0,024
	23	0,400	0,046
	30	0,520	0,077
3	17	0,885	0,072
	23	1,200	0,138
	30	1,570	0,231
6	17	1,770	0,144
	23	2,400	0,276
	30	3,140	0,462

În ce privește densitatea de energie în zona focală, ea se menține practic constantă și egală cu 6,75 kW/m^2 datorită faptului că, pe măsură ce suprafața de captare crește, se mărește și suprafața zonei de aberație.

Ținînd seama de valorile prezentate anterior, alegem ca o soluție convenabilă o construcție avînd următorii parametri : $R=6$ m semideschiderea $\alpha=30°$ și lungimea generatoarei $1=6$ m. În aceste condiții se obțin puterile teoretice concentrate în zona focală de $\cong 24$ kW, evident dacă orice fel de umbrire a fost lăsată la o parte.

Puterea teoretică relativ mare concentrată în zona focală face că devină economic interesantă o asemenea instalație, cu atît mai mult cu cît asigurarea unui grad de libertate în jurul axei focale nu aduce dificultăți tehnice deosebite.

În ce privește problemele de rezistență mecanică la presiunea vîntului, la aceste dimensiuni ele pot fi rezolvate destul de simplu tehnologic prin utilizarea unui caroiaj din platbande din oțel sau din fier cornier pe care se sprijină oglinda și care pot prelua efortul principal.

BIBLIOGRAFIE

[1] Coleta De Sabata, Curs de Fizică, I. P. T. Timișoara, 1971.
[2] S. E. Friș, A. V. Timoreva, Curs de Fizică generală, Ed. Tehn. București, 1954.

CONSIDERATIONS THÉORIQUES CONCERNAND LES DIMENSIONS CONVENABLES POUR UN CONCENTRATEUR SOLAIRE CYLLINDRIQUE DESTINÉ À L'UTILISATION INDUSTRIÈLLE

RÉSUMÉ

On a étudié les conditions théoriques permettand à obtenire des rendement à haute valeure dans le cas des concentrateurs solaires sous forme de miroire cyllindrique.

On a calculé les pouvoires concentrés, en tenand compte de l'abération de sfericité, pour un miroire ayant l'aperture α et le rayon R.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 25 (39) Fascicola 2 —1980

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA UNOR ALIAJE FEROMAGNETICE DE Ni—Fe—Mo

DE

COLETA DE SABATA, AURICA MUNTEANU, CRISTIAN MARCU, DOROTHEA MIHAILOVICI, MARIA BOLDAN

A. Introducere.

O serie de mecanisme care operează sub sarcini importante la temperaturi mari, necesită metale care să suporte în bune condiţiuni incidenţa acestor situaţii. În acest sens numai aliajele molibdenului şi tungstenului prezintă importanţă practică. Cu toate că aliajele de molibden sînt cu ceva mai inferioare din punctul de vedere al rezistenţei mecanice celor de tungsten la temperaturi înalte, acestea prezintă în schimb avantajul unei ductibilităţi mai mari. Avînd avantajul de a prezenta proprietăţi magnetice interesante şi cu perspectivă în aplicaţii, aliajele molibdenului cu metalele din grupa fierului obţinute electrolitic sub formă de pături subţiri, au făcut obiectul acestei lucrări.

B. Condiţii de obţinere a aliajului Ni—Fe—Mo şi rezultatele experimentale

Pentru obţinerea păturilor subţiri de aliaj Ni—Fe—Mo s-a folosit o baie electrolitică cu următoarea compoziţie [1] :

$NiSO_4 \cdot 7H_2O$	31 g
$Na_2MoO_4 \cdot 2H_2O$	1,5 g
$Fe(NH_4)_2(SO_4)_2\ 6H_2O$	21 g
Citrat de Na	150 g
H_2O	1000 cc

Amoniac pentru corectarea *p*H la valoarea de 10,5.

Condiţiile de depunere au fost :

Temperatura =25—40 °C

Densitatea de curent =3—30 A!dm^2

Depunerea s-a realizat pe plăci de cupru de grosime 0,1 mm.

B.1. *Efectul densităţii de curent*

După cum rezultă din [1] şi [2] variaţia densităţii de curent determină modificări importante în compoziţia aliajului depus în special pînă la o densitate de curent de 25 A/dm^2. Aceste modificări de compoziţie sînt însoţite şi de variaţii

a eficienței catodice. O mărime convenabilă în aprecierea eficienței catodice la depunerea păturilor subțiri o definim prin relația (1)

$$\gamma = \frac{\delta}{Jt} \tag{1}$$

$$\langle\gamma\rangle \quad \frac{A^0}{\frac{A}{dm^2}\ \text{minut}}$$

în care δ reprezintă grosimea stratului depus, J — densitatea de curent, t — timpul de obținere a stratului.

Factorul γ reprezintă din punct de vedere fizic grosimea stratului depus de unitatea de densitate de curent în unitatea de timp.

În figura 1 se prezintă variația factorului γ în funcție de densitatea de curent și se constată o pronunțată liniaritate în scăderea factorului γ odată cu creșterea lui J între 5 A/dm² și 30 A/dm². Această liniaritate nu este evidențiată în literatură [1] pentru intervalul densităților de curent amintite.

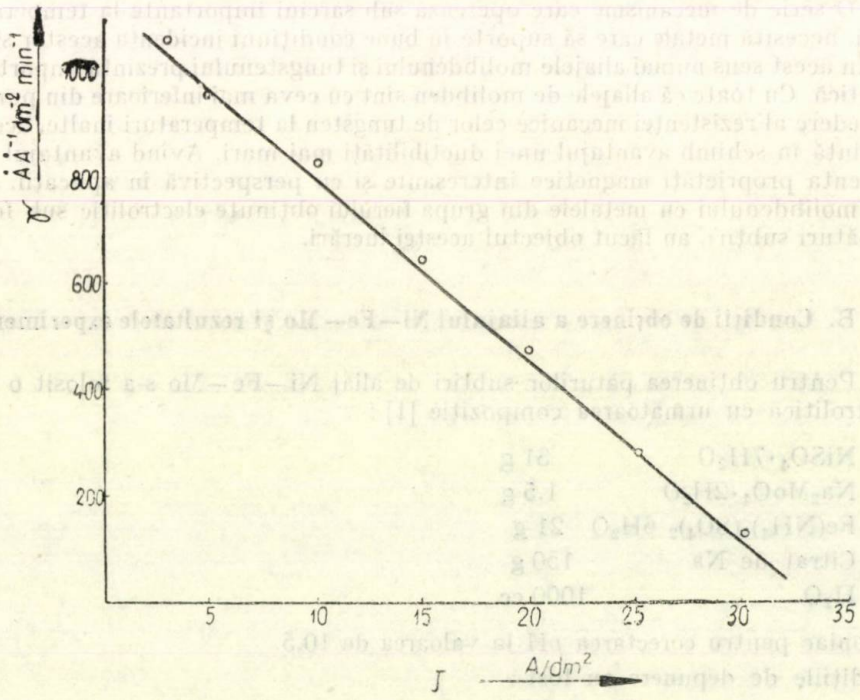


Fig. 1.

Avînd în vedere că păturile obținute sînt feromagnetice au fost ridicate ciclurile de histerezis a acestora în condițiile unei remagnetizări cvasistatice la 50 Hz [3]. Analiza ciclurilor obținute conduce la concluzia dependenței proprietăților magnetice a materialelor obținute de densitatea de curent. În figura 2a se prezintă un ciclu obținut la $J=1$ A/dm² iar în figura 2b — ciclul unei probe obținută la densitatea de curent de —10 A/dm².

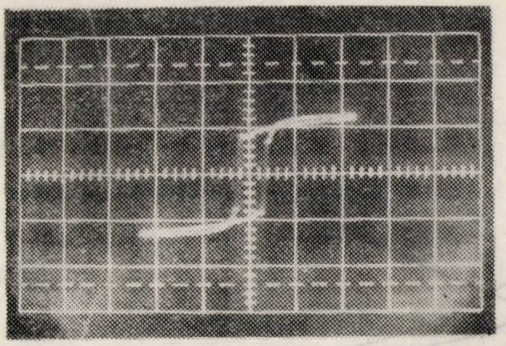


Fig. 2 a.

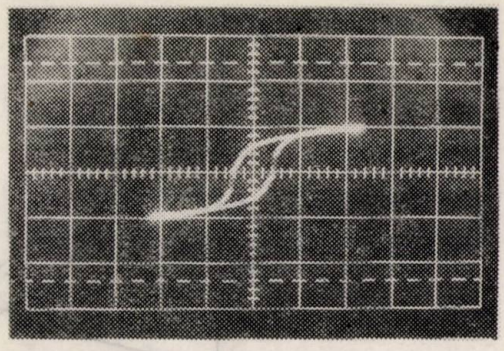


Fig. 2 b.

Dependența cîmpului coercitiv de densitatea de curent este reprezentată în figura 3. Ea indică o creștere monotonă a cîmpului coercitiv odată cu creșterea densității de curent.

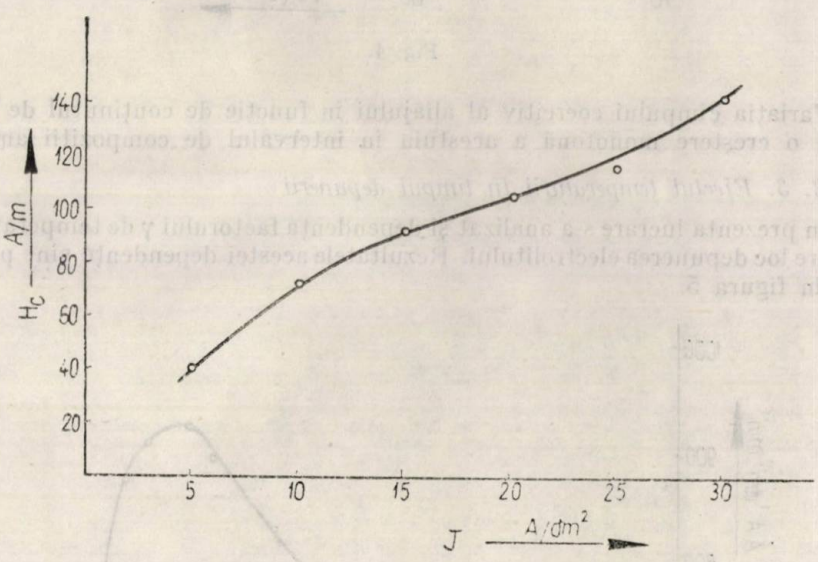


Fig. 3.

B.2. *Efectul compoziției aliajului*

Avînd în vedere că odată cu modificarea densității de curent se modifică și compoziția depozitului, este foarte probabil ca aceasta să fie factorul determinant în modificările cîmpului coercitiv. Într-adevăr așa cum rezultă din figura 4, cîmpul coercitiv este puternic influențat de raportul componentelor în aliaj.

Creșterea procentului de molibden în aliaj conduce la o pronunțată mișcare a cîmpului coercitiv.

Creșterea conținutului în fier pînă la 11,3% determină o creștere pronunțată a cîmpului coercitiv dar peste această valoare fierul conduce la micșorarea cîmpului coercitiv.

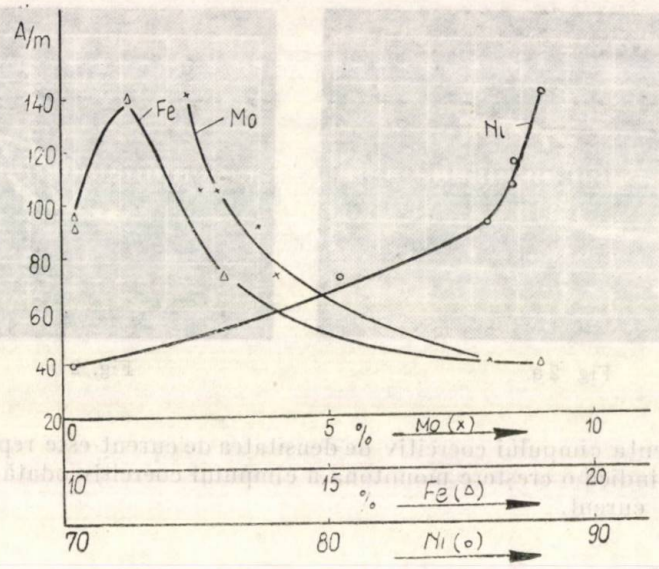


Fig. 4.

Variația cîmpului coercitiv al aliajului în funcție de conținutul de nichel indică o creștere monotonă a acestuia în intervalul de compoziții analizat.

B. 3. Efectul temperaturii în timpul depunerii

În prezenta lucrare s-a analizat și dependența factorului γ de temperatura la care are loc depunerea electrolitului. Rezultatele acestei dependențe sînt prezentate în figura 5.

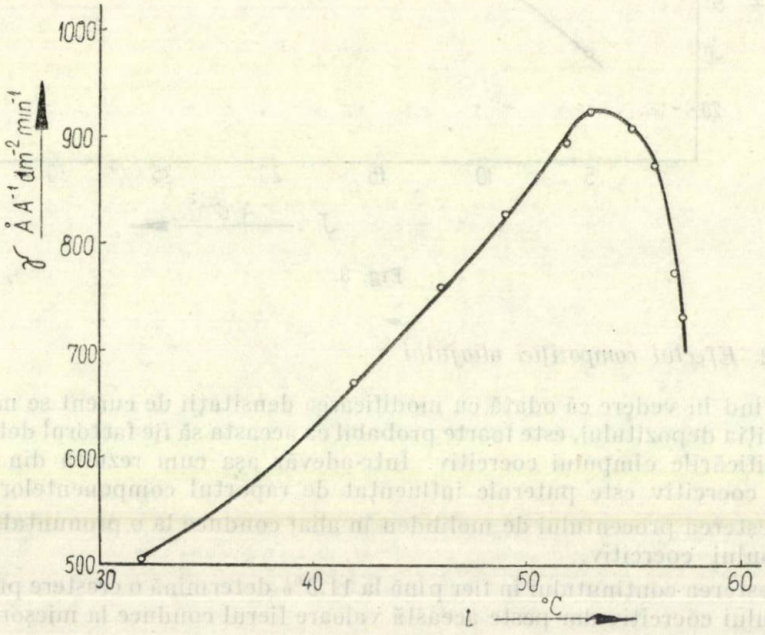


Fig. 5.

Din fig. 5 rezultă o creştere liniară a factorului γ de temperatură în intervalul 30—53 °C. Peste temperatura de 53 °C factorul γ scade odată cu creşterea temperaturii.

Analiza dependenţei cîmpului coercitiv a depozitelor de temperatură băii de electroliză nu indică modificări demne de semnalat.

C. Stabilitatea la coroziune

Pentru a analiza aliajul Ni—Fe—Mo din punctul de vedere al rezistenţei la acţiunea agenţilor chimici s-au tratat straturile cu o soluţie de 20% acid sulfuric.

Mişcarea relativă a masei este :

$$\frac{\Delta m}{m} = 0{,}007 = 0{,}7\%$$

În comparaţie cu aliajul Ni—Mn, pentru care [4] :

$$\frac{\Delta m}{m} = 0{,}1 = 10\%$$

aliajul Ni—Fe—Mo manifestă o stabilitate mult mai mare.

Rezultatele experimentale obţinute vor constitui baza unor interpretări teoretice cu privire la proprietăţile magnetice a aliajului.

BIBLIOGRAFIE

[1] T. F. Frantsevich-Zabludovskaya, I, M. Frantsevich, K. D. Modylevskaya, Electrolytic production of ternary alloys of nikel with iran and molybdenum. Zhur. Priklod. Khim., 27, 413—420, (1954).

[2] A. Brenner, Electrodepozition of Alloys, vol. II, Acad. Press. New York and London (1963).

[3] A. Munteanu, C. De Sabata, C. Marcu, D. Mihailovici, Comun. la cel de-al XXII Colocviu internaţional, Ilmenau, volum festiv (1977).

[4] A. Munteanu, C. Marcu, R. Baea, D. Mihailovici, Bul. Şt. şi Tehn IPT, 19, (1974).

EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNGEN DER ELEKTROLYTISCH NIEDERGESCHLAGENEN Ni—Fe—Mo — SCHICHTEN

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegender Arbeit wurden die Herstellungsbedingungen der Ni—Fe—Mo — Legierung (70% —90% Ni, 10% —20% Fe und 2% —8% Mo) analysiert.

Die Vergrösserung des Mo — Gehaltes in der Legierung führt zur Verkleinerung der Koerzitivkraft, während das Anwachsen des Ni — Gehaltes, eine monotone Vergrösserung der Koerzitivkraft zur Folge hat.

Die Temperaturveränderung des Bades während der Elektrolyse hat keinen besonderen Einfluss auf den Wert der Koerzitivkraft.

Durch Einwirken einer 20% H_2SO_4 Lösung weist die Ni—Fe—Mo — Schicht eine um das 10 — fache grössere Stabilität als die Ni—Mn—Schichten, auf.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 25 (39) Fascicola 2 —1980

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ŞI CONSIDERAŢII TEORETICE ASUPRA UTILIZĂRII UNOR FOLII DE CLIMATIZARE

DE

COLETA DE SABATA, ION LUMINOSU

1. Aspecte generale privind climatizarea

La latitudinea ţării noastre insolaţia în perioada verii poate depăşi 1 000 Wm^{-2} în majoritatea zilelor, dat fiind aspectul senin al cerului în acest anotimp.

Drept rezultat al efectului de seră pe care îl creează sticla dublă cu care sînt prevăzute ferestrele clădirilor, temperatura în încăperi poate atinge valori ce se situează în jurul lui 30 °C, valoare prea ridicată pentru o activitate în condiţii bune [2].

Metodele obişnuite de climatizare impun folosirea unor instalaţii alimentate cu energie electrică, cu inconvenientul dublu al consumului de energie şi al costului ei.

Se impune astfel găsirea unor metode economice de climatizare pentru realizarea unei ambianţe plăcute şi a unor condiţii bune de muncă sau de odihnă.

2. Determinări experimentale

2.1. Ne-am propus să studiem influenţa pe care o are prezenţa unei folii de poliester metalizat aplicat pe un geam de sticlă, asupra transmitanţei ansamblului.

În fig. 1 se prezintă dependenţa coeficientului de transmisie α_t în procente funcţie de lungimea de undă a luminii pentru o sticlă de geam cu grosimea de 2 mm şi pentru o folie de poliester aluminizată, semitransparentă, cu grosimea de 0,06 mm, aşezată peste sticla de geam.
Analiza celor două curbe arată că :

— sticla de geam prezintă o transmitanţă importantă, de peste 80%, pe întregul spectru al luminii vizibile (între 0,4 şi 0,7 μm), cu o singură zonă de absorbţie la lungimea de undă 0,5 μm ; în plus în zona de infraroşu apropiat (0,7—0,9) μm) sticla continuă să aibă o transmitanţă de 65—75%, or această zonă corespunde razelor purtătoare de căldură.

— folia de poliester metalizată este opacă în ultraviolet (0,2—0,34 μm) şi are o transmitanţă redusă, sub 10% pe o gamă foarte largă a lungimilor de undă şi anume 0,35—0,48 μm ; 0,65—0,9 μm, prezentînd un singur maxim, de 25% în jurul valorii de 0,5 μm.

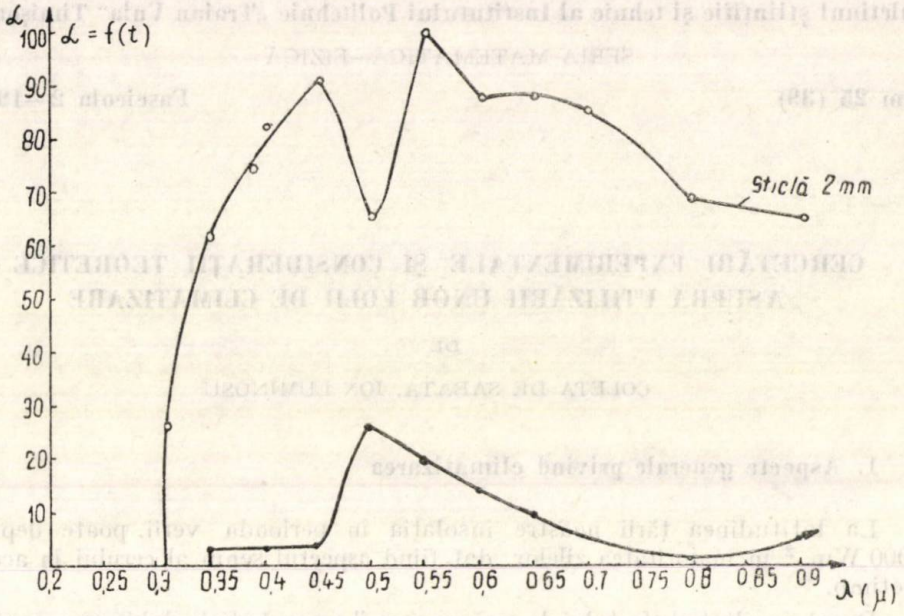


Fig. 1. Dependența transmitanță-lungime de undă.

Studiul efectuat cu spectrofotometrul de tip VSU 2 [3] scoate astfel în evidență transmitanța redusă și selectivă a foliei de poliester. În plus maximul de transmisie se situează în zona de albastru a spectrului, ceea ce face ca lumina transmisă să fie odihnitoare, fiind săracă în radiațiile roșii și portocalii, în general considerate iritante pentru ochi și pentru sistemul nervos, dacă intensitatea luminii atinge valorile mari, ce corespund zilelor de vară.

2.2. Al doilea set de măsurători se referă la determinarea coeficientului de reflexie a foliei de poliester. Măsurătorile făcute asupra reflexiei directe și difuze au dat un coeficient total de reflexie de 42%.

2.3. Al treilea set de măsurători a privit reducerea efectului de seră pe care îl produce sticla de geam acoperită cu folie. Măsurătorile au fost făcute utilizîndu-se incinte cu dimensiunile 22, 12, 5,9 (cm) confecționate din material termoizolant și avînd fața anterioară acoperită cu un geam de sticlă, față ce a fost supusă radiației solare directe.

Determinările experimentale au fost făcute avînd o incintă-martor, acoperită cu o placă de sticlă și o incintă identică avînd în plus o folie de poliester metalizată.

Curbele prezentate au indicate pe abscisă ora, în ordonată temperatura din incinte, cu și fără folie, temperatura ambiantă măsurată la umbră și, de asemenea, se precizează aspectul cerului.

În fig. 2 sînt redate aceste curbe pentru una din măsurători, pe cer senin, temperatura ambiantă fiind de 18 °C la umbră.

Analiza scoate în evdență următoarele :

—temperatura ambiantă în intervalul considerat a crescut pînă la 18 °C, unde a avut palier ;

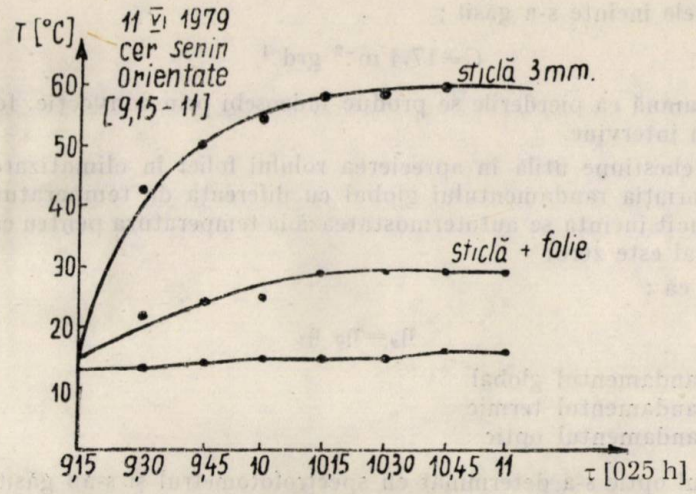


Fig. 2. Dependența temperatură-timp.

— temperatura în incinta cu geam a avut o creștere rapidă atingînd după 60 minute, o valoare de 60 °C, rămînînd apoi constantă ;

— temperatura în incinta prevăzută cu geam și folie a crescut cu o pantă mai mică, atingînd o valoare de echilibru cu 30 °C mai mică.

Cum insolația a fost egală pentru ambele incinte și volumul de aer același, putem calcula cantitățile de căldură primită de incinte din panta curbelor de încălzire :

$$\frac{Q_f}{Q_g} = \frac{mc\,\Delta t_f}{mc\,\Delta t_g} = \frac{12}{45} = 0{,}27$$

Prin urmare randamentul de trecere a căldurii în cazul incintei cu folie este de numai 27% față de căldura ce a fost recepționată de incinta martor.

2.4. În cazul încăperilor de mari dimensiuni — locuințe și localuri — efectul de seră determină o încălzire mai redusă față de incintele de mici dimensiuni utilizate în măsurători. Și în aceste cazuri utilizarea foliilor de climatizare menține temperatura din încăpere la valori sub 25 °C.

3. Calculul termic

Interesează în condițiile utilizării foliei de poliester dacă conductanța se modifică simțitor față de conductanța incintelor prevăzute numai cu geam

În acest sens au fost calculate conductanțele pentru cele două tipuri de incinte cu formula [4] :

$$C = \frac{1}{\tau}\,\frac{mc\,\Delta t}{S_p\,\Delta T} \qquad (1)$$

cu : m — masa de aer conținută de incintă
c — căldura masică
S_p — suprafața de pierderi
Δt — variația temperaturii aerului din incintă
ΔT — diferența între temperatura aerului din incintă și temperatura mediului ambiant
τ — intervalul de timp în care se produce variația Δt a temperaturii

Pentru ambele incinte s-a găsit :

$$C=17{,}4\ \mathrm{m^{-2}\ grd^{-1}},$$

ceea ce înseamnă că pierderile se produc îndeosebi prin convecție, fenomen în care folia nu intervine.

O altă chestiune utilă în aprecierea rolului foliei în climatizare este cea legată de variația randamentului global cu diferența de temperatură față de mediu, întrucît incinta se autotermostatează la temperatura pentru care randamentul global este zero.

Se știe că :

$$\eta_g=\eta_0\ \eta_t \tag{2}$$

cu : η_g — randamentul global
η_t — randamentul termic
η_0 — randamentul optic

Randamentul optic s-a determinat cu spectrofotometrul și s-au găsit valorile : 0,77 pentru geam și 0,42 pentru ansamblul geam plus folie. Randamentul termic, dacă se neglijează căldura pierdută prin variația densității aerului din incintă, se calculează cu [1] formula :

$$\eta_t=1-\frac{\Delta t}{\Delta t_{max}} \tag{3}$$

Figurile 3 și 4 redau dependența η_0, η_t, η_g cu temperatura.

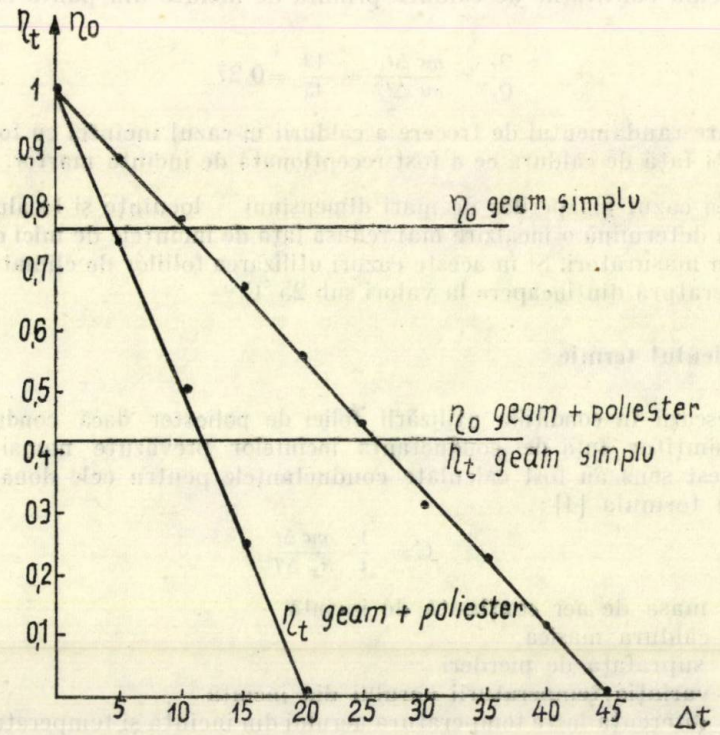


Fig. 3. Dependența randamentelor optic și termic, funcție de variația temperaturii.

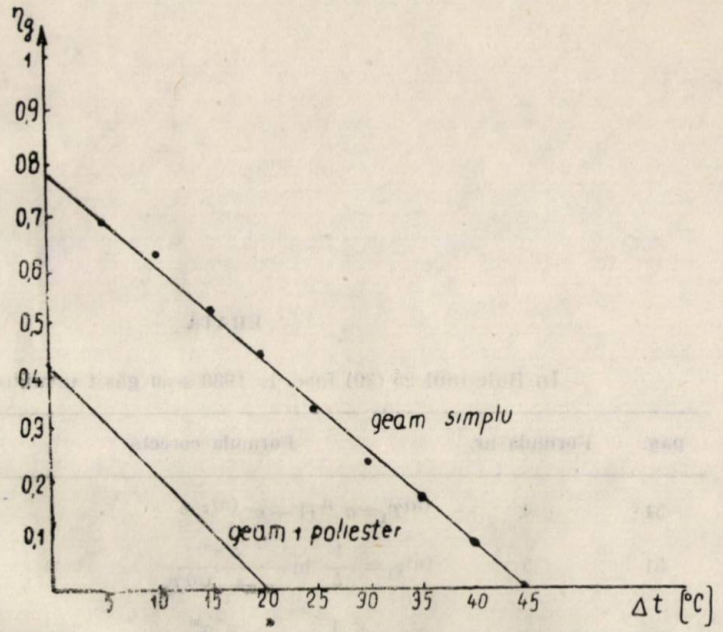


Fig. 4. Dependența randamentului global, funcție de variația temperaturii.

4. Concluzii

Deoarece conductanțele s-au dovedit a fi egale se desprinde concluzia că foliile sînt ineficiente în timpul iernii în tentativa de micșorare a coeficientului volumic de pierderi al locuințelor.

Analiza dependențelor randamentelor cu temperatura duce la concluzia că incintele cu geam se autotermostatează la diferențe de temperatură față de mediul de 40—45 °C, pe cînd cele echipate și cu folie se autotermostatează la diferențe de 15—20 °C față de mediu, din aceste puncte randamentul global de conversie a energiei electromagnetice în căldură fiind zero, prin egalarea energiei convertite cu cea pierdută.

Întrucît pierderilor egale le corespund transmitanțe egale, în locuințele echipate cu folii de poliester peste geam se vor înregistra temperaturi mai mici decît în celelalte. Eficiența folosirii foliilor va fi maximă pentru camerele prevăzute cu geamuri orientate spre sud.

BIBLIOGRAFIE

[1] De Sabata C., Luminosu I., Bul. șt. tehn. IPT (ser, mat. fiz.), 1978 *24* (*38*) fasc. 2.
[2] De Sabata C., Luminosu I., Bul. șt. tehn. IPT (ser. mat-fiz.), 1978 *24* (*38*) fasc. 1.
[3] De Sabata C., Marcu C., Mihalca I., Luminosu I., Bul. șt. tehn. IPT (ser. mat-fiz.) 1978 *24* (*38*) fasc. 1.
[4] Cooperation Medit. pour l'energie solaire XI 16 Julliet, 1969 Marsilia pp. 25—26.

RECHERCHES EXPERIMENTALLES ET CONSIDERATIONS THÉORIQUES CONCERNAND LES COUCHES MINCES DE CLIMATISATION

RÉSUMÉ

Dans cet ouvrage sont présentés les resultats concernand certains propriétés optiques des couches minces métalliques deposés sur le pollyésthères transparent dans le but d'être utilisées à la climatisation des logements.

ERATĂ

În Buletinul 25 (39) fasc. 1, 1980 s-au găsit următoarele erori:

pag.	Formula nr.	Formula corectă
51	4	$^{(n)}T_1 = a^{\ n}(1 - e^{-\ (n)}\tau_i \cdot b$
51	5	$^{(n)}\tau_1 = \frac{1}{b} \ln \frac{a\,\alpha^n}{a\,\alpha^n - {}^{(n)}T_1}$
51	6	$^{(m)}\tau_1 = \frac{1}{b'} \ln \frac{a'\,\alpha^m}{a'\,\alpha^m - {}^{(m)}T_1}$
52	7	$^{(n)}\tau_2 = \frac{1}{b} \ln \frac{a\,\alpha^n}{a\,\alpha^n - {}^{(m)}T_1}$
52	8	$^{(m,n)}\tau_3 = {}^{(n)}\tau_1 - {}^{(n)}\tau_2 + {}^{(m)}\tau_1$
52	12	$\tau_{st} = \frac{C}{C_n \cdot S_p} \ln \frac{1}{\alpha} \frac{C_m \cdot \alpha - C_n}{C_n \cdot \alpha - C_{n+1}} \frac{C_n - C_{n+1}}{C_m - C_n}$
56	11	$^{(0,1)}\tau_{min} = \left[\frac{1}{S_p} \ln \frac{1}{C_0 - C_1} \frac{A \cdot S_i \Phi_i (\alpha C_0 - C_1)}{A \cdot S_i \Phi_i \alpha - {}^{(1)}T_1 C_1 S_p} + \frac{1}{C_0} \ln \frac{C_0 - C_1}{\alpha C_0 - C_1}\right] \frac{C}{S_p}$

Rabtár

F 7414

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIȘOARA

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tomul 25 (39) Fascicola 2

1982 AUG 10

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR BUDAPEST

IULIE—DECEMBRIE
1980

Cititorii din străinătate se pot abona prin

ILEXIM,

Serv. Export-import presă – Press Department

str. 30 Decembrie nr. 3–5 – P.O.B. 136–137

Bucharest – Romania